Локализация инвариантных компактов в одной системе Шпротта

09, сентябрь 2012

DOI: 10.7463/0912.0450278

Канатников А. Н., Михайлова О. В.

УДК 517.925.5

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

mathmod@bmstu.ru

Введение

В описании качественного поведения динамической системы важную роль играют структура и расположение ограниченных траекторий системы, таких как положения равновесия, предельные циклы, сепаратрисы и более сложные траектории, характеризующие явления динамического хаоса. Как правило описать ограниченные траектории не представляется возможным, и речь идет об оценке их положения. Эту задачу можно решать как задачу оценки положения инвариантных компактных множеств, поскольку примером такого множества является замыкание любой ограниченной траектории.

Один из подходов к оценке положения инвариантных компактных множеств состоит в построении в фазовом пространстве динамической системы таких множеств, которые содержат все инвариантные компакты. Подобные множества в литературе названы локализирующими. Задаче построения локализирующих множеств посвящена довольно обширная литература (например, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]).

В процесс исследований проблем локализации был разработан эффективный метод локализации, названный функциональным [4, 10]. В настоящей работе, используя этот метод, мы исследуем полиномиальную динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = -x + \alpha y, \\ \dot{z} = x^2 - z, \end{cases} \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

которая в частном случае (при $\alpha = 0,5$) совпадает с одной из систем с хаотическим поведением, найденных Шпроттом [11, случай SQ_F].

Система имеет два положения равновесия $F_1(0, 0, 0)$ $F_2(-1/\alpha, -1/\alpha^2, 1/\alpha^2)$, не являющиеся устойчивыми, что указывает на сложный характер поведения системы. На рис. 1 показана траектория системы при $\alpha = 0,5$ с начальной точкой $x_0 = (-5/4, -25/16, 25/16)^T$.

Рис. 1. Траектория системы (1)

В разд. 1 figure.1 описывается функциональный метод локализации и обсуждается вопрос выбора локализующих функций. В разд. 2 equation.4 строится семейство локализующих множеств для рассматриваемой системы.

1. Локализирующие функции и локализирующие множества

Рассмотрим общий случай автономной системы

$$\dot{x} = f(x), \quad (2)$$

где $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение.

Для произвольной гладкой в $\mathbb{R}^n$ функции φ введем множество

$$S_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n: \dot{\varphi}(x) = 0\},$$

где $\dot{\varphi}(x) = \varphi'(x)f(x)$ — производная функции $\varphi(x)$ в силу системы (2). Это множество называется универсальным сечением [10].

На множестве S_φ вычислим экстремальные значения функции φ :

$$\varphi_{\inf} = \inf_{x \in S_\varphi} \varphi(x), \quad \varphi_{\sup} = \sup_{x \in S_\varphi} \varphi(x).$$

Множество

$$\Omega_\varphi = \{x \in R^3: \varphi_{\inf} \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}\}$$

содержит все инвариантные компактные множества системы (2), т.е. является локализирующим для инвариантных компактов системы (2).

Функциональный метод не дает условий существования инвариантных компактов. Фактически он утверждает, что вне множества Ω_φ нет инвариантных компактов. Впрочем, в рамках функционального метода можно построить так называемые полупрозрачные поверхности [10], при определенном положении которых можно делать заключения о существовании аттракторов или репеллеров.

Вычисление экстремальных значений $\varphi_{\inf}$ и $\varphi_{\sup}$ на множестве S_φ представляет собой задачу математического программирования, которая в ряде случаев может решаться аналитически. Отметим, что если множество S_φ компактно, то значения $\varphi_{\inf}$ и $\varphi_{\sup}$ достигаются в некоторых точках, являющихся точками условного локального экстремума. В этом случае для поиска экстремальных значений можно использовать метод множителей Лагранжа. В общем случае экстремальные значения могут не достигаться на S_φ и их вычисление оказывается сложной математической задачей, которую не удастся решить простым применением численных методов оптимизации.

Функциональный метод не дает никаких рецептов по выбору локализирующей функции. Конечно, в качестве такой функции можно выбрать любую, но неудачный выбор может привести к тому, что $\varphi_{\inf}$ и $\varphi_{\sup}$ будут совпадать с точной нижней и точной верхней гранями функции φ в фазовом пространстве, а Ω_φ в результате покроет все фазовое пространство. Это вариант тривиального локализирующего множества, которое свидетельствует об отсутствии содержательного результата.

При выборе локализирующей функции можно руководствоваться следующими принципами. Во-первых, функция φ не должна в фазовом пространстве достигать своих наименьшего и наибольшего значений, поскольку все локальные экстремумы функции φ попадают в универсальное значение и результат в таком случае будет тривиальным. Во-вторых, локализирующая функция должна быть достаточно простой с тем, чтобы задача вычисления экстремальных значений могла быть решена в основном аналитически. Наконец, в третьих, следует учитывать, что для хорошего результата важно расположение поверхностей уровня функции φ , а не значения, которые эта функция принимает. Функции $\varphi(x)$ и $h(\varphi(x))$, где h — строго монотонная функция, дают одинаковый результат. Все эти соображения вытекают из свойств локализирующих множеств, построенных функциональным методом [10].

У рассматриваемой системы (1) правые части являются многочленами. Поэтому естественно в качестве локализирующей функции выбрать многочлен. Тогда возникает задача

исследования многочлена $\varphi(x)$ на алгебраической поверхности S_φ . Эта задача хорошо изучена в случае, когда степень многочлена и порядок алгебраической поверхности не превышают двух. Особо выделим ситуацию, в которой алгебраическая поверхность S_φ компактна. В этом случае, как уже отмечалось, значения $\varphi_{\inf}$ и $\varphi_{\sup}$ достигаются в некоторых точках и их можно найти, решая задачу на условный экстремум методом множителей Лагранжа. Единственной компактной поверхностью 2-го порядка является эллипсоид. При этом квадратичная форма функции $\dot{\varphi}(x)$ является положительно или отрицательно определенной.

Возникает задача выбора такого многочлена степени не выше двух, у которого производная в силу системы также имеет степень не выше двух. Подобная задача изучалась и в исследованиях других динамических систем [6, 10].

Рассмотрим в качестве локализирующей квадратичную функцию общего вида

$$p(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Kx + 2Ly + 2Mz,$$

где хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля

Теорема 1. Для того чтобы степень многочлена $\dot{p}(x, y, z)$ не превышала двух, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$C = E = F = 0. \quad (3)$$

Доказательство. В общем случае производная $\dot{\varphi}$ имеет степень 3. Выпишем слагаемые третьей степени: $2Czx^2, 2Eyx^2, 2Fxx^3$. Чтобы степень многочлена была два или ниже, эти слагаемые должны равняться нулю. Это и приводит к нужным условиям. Теорема доказана.

В соответствии с доказанной теоремой ограничимся случаем

$$p(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + 2Dxy + 2Kx + 2Ly + 2Mz.$$

В этом случае производная $\dot{p}$ будет линейной по переменной z , но если с помощью уравнения $\dot{p} = 0$ выразить z через x и y и подставить в выражение $p(x, y, z)$, то получим дробно-линейную функцию. Это позволяет задачу $p \rightarrow \text{ext}$ при условии $\dot{\varphi} = 0$ свести к двумерной задаче на безусловный экстремум, но при этом целевая функция окажется дробно-линейной. Целевая функция будет многочленом при условии, что $A = D = 0$ (тогда z будет выражаться через x и y линейно). При этом условии

$$p(x, y, z) = By^2 + 2Kx + 2Ly + 2Mz. \quad (4)$$

и

$$\dot{p}(x, y, z) = 2Mx^2 + 2\alpha By^2 - 2Bxy - 2Lx + 2(K + \alpha L)y + 2(K - M)z.$$

2. Построение семейства локализирующих множеств

Выбрав в качестве локализирующей функции многочлен $p(x, y, z)$ вида (4), приходим к задаче

$$By^2 + 2Kx + 2Ly + 2Mz \rightarrow \text{extr},$$

$$2Mx^2 + 2\alpha By^2 - 2Bxy - 2Lx + 2(K + \alpha L)y + 2(K - M)z = 0.$$

Выразив с помощью уравнения связи переменную z через x и y и подставив в выражение для целевой функции, приходим к функции

$$p_S(x, y) = p(x, y, z) \Big|_{\dot{p}=0} =$$

$$= \frac{2M^2x^2 + B((1+2\alpha)M - K)y^2 - 2BMxy + 2(KM - K^2 - LM)x + 2((1+\alpha)LM - KL + KM)y}{M - K}.$$

Функция

$$\psi(x, y) = (M - K)p_S(x, y) = 2M^2x^2 + B((1 + 2\alpha)M - K)y^2 - 2BMxy + 2\tilde{K}x + 2\tilde{L}y,$$

где $\tilde{K} = KM - K^2 - LM$, $\tilde{L} = (1 + \alpha)LM - KL + KM$, неограничена сверху, но может достигать точной нижней грани в конечной точке. Для этого необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма функции была положительно определена. А для этого требуется, чтобы определитель квадратичной формы был положителен, т.е. должно выполняться условие

$$2M^2B((1 + 2\alpha)M - K) - B^2M^2 > 0.$$

Выделим особый случай $B = 0$, при котором локализирующая функция линейна. Тогда функция $\psi(x, y)$ достигает точной нижней грани, если $\tilde{L} = (1 + \alpha)LM - KL + KM = 0$. В этот случай входит функция $\varphi_0(x, y, z) = z$, которой соответствуют параметры $B = K = L = 0$, $M = 1/2$.

Для детального анализа экстремальных свойств функции $\psi(x, y)$ упростим ее заменой переменных. Выделим квадрат по переменной x , упрощая квадратичную форму этой функции:

$$\psi(x, y) = 2M^2\left(x - \frac{B}{2M}y\right)^2 + B\left((1 + 2\alpha)M - K - \frac{B}{2}\right)y^2 + 2\tilde{K}x + 2\tilde{L}y.$$

После замены переменной $x_1 = x - \frac{B}{2M}y$ получаем функцию

$$\psi_1(x_1, y) = 2M^2x_1^2 + B\left((1 + 2\alpha)M - K - \frac{B}{2}\right)y^2 + 2\tilde{K}x_1 + 2\left(\tilde{L} + \frac{\tilde{K}B}{2M}\right)y,$$

имеющую то же наименьшее значение, что и функция $\psi(x, y)$. Выделим квадраты по переменным x_1 и y :

$$\begin{aligned}\psi_1(x_1, y) = & 2M^2 \left(x_1 + \frac{\tilde{K}}{2M^2} \right)^2 + \\ & + B \left((1 + 2\alpha)M - K - \frac{B}{2} \right) \left(y + \frac{2\tilde{L}M + \tilde{K}B}{MB(2(1 + 2\alpha)M - 2K - B)} \right)^2 - \\ & - \frac{\tilde{K}^2}{2M^2} - \frac{(2\tilde{L}M + \tilde{K}B)^2}{2M^2B(2(1 + 2\alpha)M - 2K - B)}.\end{aligned}$$

Отсюда видим, что при $B \in (0, 2(1 + 2\alpha)M - 2K)$

$$\inf_{(x_1, y) \in \mathbb{R}^2} \psi_1(x_1, y) = -\frac{\tilde{K}^2}{2M^2} - \frac{(2\tilde{L}M + \tilde{K}B)^2}{2M^2B(2(1 + 2\alpha)M - 2K - B)}.$$

Итак, при $M > K$ и $B \in (0, 2(1 + 2\alpha)M - 2K)$

$$\varphi_{\inf} = \frac{\inf_{(x_1, y) \in \mathbb{R}^2} \psi_1(x_1, y)}{M - K} = -\frac{B(2(1 + 2\alpha)M - 2K - B)\tilde{K}^2 + (2\tilde{L}M + \tilde{K}B)^2}{2M^2B(2(1 + 2\alpha)M - 2K - B)(M - K)}.$$

Если же $M < K$ и $B \in (0, 2(1 + 2\alpha)M - 2K)$ (или $B \in (2(1 + 2\alpha)M - 2K, 0)$), то

$$\varphi_{\sup} = -\frac{B(2(1 + 2\alpha)M - 2K - B)\tilde{K}^2 + (2\tilde{L}M + \tilde{K}B)^2}{2M^2B(2(1 + 2\alpha)M - 2K - B)(M - K)}.$$

В результате приходим к следующим локализирующим множествам:

при $M > K$ и $B \in (0, 2(1 + 2\alpha)M - 2K)$

$$By^2 + 2Kx + 2Ly + 2Mz \geq -\frac{B(2(1 + 2\alpha)M - 2K - B)\tilde{K}^2 + (2\tilde{L}M + \tilde{K}B)^2}{2M^2B(2(1 + 2\alpha)M - 2K - B)(M - K)};$$

при $M < K$ и $B \in (0, 2(1 + 2\alpha)M - 2K)$

$$By^2 + 2Kx + 2Ly + 2Mz \leq \frac{B(2(1 + 2\alpha)M - 2K - B)\tilde{K}^2 + (2\tilde{L}M + \tilde{K}B)^2}{2M^2B(2(1 + 2\alpha)M - 2K - B)(K - M)}.$$

Ограничимся случаем $M \neq 0$. В этом случае можно считать, что $M = 1$. При этом неравенство, описывающее локализирующее множество, будет иметь следующий вид:

при $K < 1$ и $B \in (0, 2(1 + 2\alpha) - 2K)$

$$By^2 + 2Kx + 2Ly + 2z \geq -\frac{B(2(1 + 2\alpha) - 2K - B)\tilde{K}^2 + (2\tilde{L} + \tilde{K}B)^2}{2B(2(1 + 2\alpha) - 2K - B)(1 - K)}; \quad (5)$$

при $K > 1$ и $B \in (0, 2(1 + 2\alpha) - 2K)$

$$By^2 + 2Kx + 2Ly + 2z \leq \frac{B(2(1 + 2\alpha) - 2K - B)\tilde{K}^2 + (2\tilde{L} + \tilde{K}B)^2}{2B(2(1 + 2\alpha) - 2K - B)(K - 1)}. \quad (6)$$

Рис. 2. Граница локализирующего множества для инвариантных компактов системы (1)

При этом

$$\tilde{K} = K - K^2 - L, \quad \tilde{L} = (1 + \alpha)L - KL + K.$$

На рис. 2 представлена сложная траектория рассматриваемой системы при $\alpha = 0,5$ и граница локализирующего множества (6) при $B = 0,5$, $K = 1,5$ и $L = 1$.

3. Пересечение семейства локализирующих множеств

Наиболее точный результат с точки зрения расположения инвариантных компактов рассматриваемой системы можно получить, если рассчитать пересечение найденного семейства локализирующих множеств. Чтобы выполнить это, разрешим неравенства (5) и (6) относительно переменного z . Получим:

при $K < 1$ и $B \in (0, 2(1 + 2\alpha) - 2K)$

$$z \geq -\frac{B(2(1 + 2\alpha) - 2K - B)\tilde{K}^2 + (2\tilde{L} + \tilde{K}B)^2}{4B(2(1 + 2\alpha) - 2K - B)(1 - K)} - \frac{B}{2}y^2 - Kx - Ly; \quad (7)$$

при $K > 1$ и $B \in (0, 2(1 + 2\alpha) - 2K)$

$$z \leq \frac{B(2(1 + 2\alpha) - 2K - B)\tilde{K}^2 + (2\tilde{L} + \tilde{K}B)^2}{2B(2(1 + 2\alpha) - 2K - B)(K - 1)} - \frac{B}{2}y^2 - Kx - Ly. \quad (8)$$

Чтобы получить пересечение семейства множеств (7), достаточно в правой части неравенства перейти к точной верхней грани:

$$z \geq \sup_{(B, K, L) \in V_1} \left(-\frac{B(2(1+2\alpha) - 2K - B)\tilde{K}^2 + (2\tilde{L} + \tilde{K}B)^2}{4B(2(1+2\alpha) - 2K - B)(1-K)} - \frac{B}{2}y^2 - Kx - Ly \right), \quad (9)$$

где множество V_1 в пространстве параметров B, K, L описывается неравенствами

$$K < 1, \quad 0 < B < 2(1+2\alpha) - 2K.$$

Аналогично пересечение семейства множеств (8) описывается следующим образом:

$$z \leq \inf_{(B, K, L) \in V_2} \left(\frac{B(2(1+2\alpha) - 2K - B)\tilde{K}^2 + (2\tilde{L} + \tilde{K}B)^2}{2B(2(1+2\alpha) - 2K - B)(K-1)} - \frac{B}{2}y^2 - Kx - Ly \right), \quad (10)$$

где множество V_2 есть объединение двух множеств: $V_2 = V_{2a} \cup V_{2b}$, причем множество V_{2a} описывается неравенствами

$$1 < K < 2(1+2\alpha), \quad 0 < B < 2(1+2\alpha) - 2K,$$

а множество V_{2b} — неравенствами

$$K > 2(1+2\alpha), \quad 2(1+2\alpha) - 2K < B < 0.$$

Представить соотношения (9) и (10) в более удобной аналитической форме вряд ли возможно, поскольку выражение под знаком точной верхней (соответственно нижней) грани слишком сложное. Однако эти соотношения можно использовать для численных расчетов. На рис. 3 представлена граница локализирующего множества, полученного пересечением семейства (9) по множеству параметров V_1 (нижняя граница) и пересечением семейства (10) по множеству параметров V_{2a} (верхняя граница). Расчеты выполнены в системе Matlab с помощью функции **fmincon** из пакета (toolbox) Optimization.

4. Заключение

В работе рассмотрена трехмерная полиномиальная система, в частном случае совпадающая с одной из систем с хаотическим поведением, найденных Шпроттом. Для инвариантных компактных множеств этой системы получено трехпараметрическое семейство локализирующих множеств.

С использованием численных методов оптимизации получено пересечение найденного семейства локализирующих множеств, соответствующий результат представлен в графической форме.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 12-07-00267 и 11-01-00733) и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-3659.2012.1).

Рис. 3. Траектория системы и пересечение семейства локализирующих множеств для инвариантных компактов системы

Список литературы

1. Крищенко А.П. Локализация предельных циклов // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1858–1865.
2. Крищенко А.П., Шальнева С.С. Задача локализации для автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 11. С. 1495–1500.
3. Леонов Г.А. Оценки аттракторов и существование гомоклинических орбит в системе Лоренца // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65, № 1. С. 21–35.
4. Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 12. С. 1597–1604.
5. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of the Lorenz system // Phys. Lett. A. 2006. V. 353, No 5. P. 383–388. DOI: 10.1016/j.physleta.2005.12.104.
6. Канатников А.Н. Локализация инвариантных компактов ПРТ-системы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2007. № 1. С. 3–18.
7. Starkov K.E. Compact invariant sets of the static spherically symmetric Einstein-Yang-Mills equations // Phys. Lett. A. 2010. V. 374, No 15–16. P. 1728–1731. DOI: 10.1016/j.physleta.2010.02.035.

8. Wang P., Li D., Hu Q. Bounds of the hyper-chaotic Lorenz-Stenflo system // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. V. 15, No 9. P. 2514–2520. DOI: 10.1016/j.cnsns.2009.09.015.
9. Starkov K.E. Compact invariant sets of the Bianchi VIII and Bianchi IX Hamiltonian systems // Phys. Lett. A. 2011. V. 375, No 36. P. 3184–3187. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.06.064.
10. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Инвариантные компакты динамических систем М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 231 с.
11. Sprott J.C. Elegant Chaos: Algebraically simple chaotic flows. World Sci., 2010. 304 p.

The localization of invariant compact sets in one Sprott system

09, September 2012

DOI: 10.7463/0912.0450278

Kanatnikov A. N., Mikhailova O. V.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

mathmod@bmstu.ru

The three-dimensional polynomial dynamical system $\dot{x} = y + z$, $\dot{y} = -x + \alpha y$, $\dot{z} = x^2 - z$ with complex behavior is considered. In the particular case $\alpha = 0,5$ this system reduces to one of systems with the chaotic behavior, which was found by J.C. Sprott. For the specified system the problem of localization of invariant compact sets, i.e. a problem of construction of such set in phase space of the system which contains all invariant compact sets of this system is solving. In article the family of localizing sets for invariant compact sets is received using the functional method of localization proposed by A.P. Krishchenko. The intersection of this family is found by numerical optimization methods.

References

1. Krishchenko A.P. Lokalizatsiia predel'nykh tsiklov [Localization of limit cycles]. *Differentsial'nye uravneniia*, 1995, vol. 31, no. 11, pp. 1858–1865.
2. Krishchenko A.P., Shal'neva S.S. Zadacha lokalizatsii dlia avtonomnykh sistem [The task of localization for autonomous systems]. *Differentsial'nye uravneniia*, 1998, vol. 34, no. 11, pp. 1495–1500.
3. Leonov G.A. Otsenki attraktorov i sushchestvovanie gomoklinicheskikh orbit v sisteme Lorentsa [Estimates of attractors and the existence of homoclinic orbits in the Lorenz system]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 2001, vol. 65, no. 1, pp. 21–35.
4. Krishchenko A.P. Lokalizatsiia invariantnykh kompaktov dinamicheskikh sistem [Localization of invariant compact sets of dynamical systems]. *Differentsial'nye uravneniia*, 2005, vol. 41, no. 12, pp. 1597–1604.
5. Krishchenko A.P., Starkov K.E. Localization of compact invariant sets of the Lorenz system. *Phys. Lett. A*, 2006, vol. 353, no. 5, pp. 383–388. DOI: 10.1016/j.physleta.2005.12.104.

6. Kanatnikov A.N. Lokalizatsiia invariantnykh kompaktov PRT-sistemy [Localization of Invariant Compact Sets of PRT-System]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2007, no. 1, pp. 3–18.
7. Starkov K.E. Compact invariant sets of the static spherically symmetric Einstein-Yang-Mills equations // *Phys. Lett. A*, 2010, vol. 374, no. 15–16, pp. 1728–1731. DOI: 10.1016/j.physleta.2010.02.035.
8. Wang P., Li D., Hu Q. Bounds of the hyper-chaotic Lorenz-Stenflo system // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, vol. 15, no. 9, pp. 2514–2520. DOI: 10.1016/j.cnsns.2009.09.015.
9. Starkov K.E. Compact invariant sets of the Bianchi VIII and Bianchi IX Hamiltonian systems // *Phys. Lett. A*, 2011, vol. 375, no. 36, pp. 3184–3187. DOI: 10.1016/j.physleta.2011.06.064.
10. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. *Invariantnye kompakty dinamicheskikh system* [Invariant compact sets of dynamical systems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 231 p.
11. Sprott J.C. *Elegant Chaos: Algebraically simple chaotic flows*. World Sci., 2010. 304 p.