Моделирование и расчет процессов индукционного нагрева прессового оборудования при производстве резинотехнических изделий

03, март 2013

DOI: 10.7463/0313.0541632

Малыгин Е. Н., Карпушкин С. В., Карпов С. В.

УДК 62-932.4

ФГБОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

malygin_en@mail.ru

karp@mail.gaps.tstu.ru

g7302@yandex.ru

Введение

Производство резинотехнических изделий (РТИ) имеет устойчивую тенденцию к увеличению. В связи с этим возникает необходимость модернизации устаревшего и создания нового оборудования, выпускающего качественную продукцию с наименьшими издержками производства. Наиболее часто РТИ изготавливаются методом горячего прессования. Для их вулканизации в металлических пресс-формах применяют, в основном, гидравлические вулканизационные прессы, нагревательные плиты которых оснащены индукторами (рисунок 1).

Качество РТИ во многом определяется равномерностью температурного поля в объеме изделия. На равномерность поля оказывают влияние многочисленные факторы, прежде всего – параметры пресс-формы, системы её обогрева и внешнего теплообмена, а также расположение пресс-формы на поверхности плиты, теплофизические свойства материалов плиты и пресс-формы, параметры системы автоматического управления (САУ) температурой нагревательных плит.

До настоящего времени в литературе рассматривались, главным образом, задачи обеспечения температурного поля заданного профиля на рабочей поверхности нагревательных плит прессов, причем чаще всего требуется обеспечить равномерное поле с погрешностью $\pm 3 \div 5$ °С [1, 2]. Между тем, целью нагрева плит прессы является обеспечение равномерного температурного поля в вулканизируемом изделии, однако постановка и решение трёхмерных задач моделирования нестационарного нагрева

системы «плита–пресс-форма–изделие» с учётом нелинейных зависимостей свойств материалов и мощности индукторов от температуры в литературе практически не рассматриваются из-за сложности математического описания (система дифференциальных уравнений в частных производных).

Рис. 1 – Конструкция плиты с индукционными нагревателями

В данной работе предлагается методика расчета температурных полей одиночной плиты индукционного нагрева и системы «плита индукционного нагрева–пресс-форма–изделие» с применением сравнительно нового инструмента – системы конечноэлементного анализа COMSOL Multiphysics [3]. Поскольку разработчики подобных систем не предоставляют информацию об используемом математическом описании моделируемого процесса и методике решения математических моделей, для проверки адекватности методики и результатов применения системы COMSOL Multiphysics производится сравнение результатов с данными промышленного эксперимента по исследованию процесса нагрева одиночной индукционной плиты, а также с результатами решения разработанной математической модели процесса нагрева этой плиты методом конечных интегральных преобразований [4, 5].

Цель работы – разработка методик тепловых расчётов индукционных нагревательных плит прессов, осуществляющих процесс вулканизации РТИ в металлических пресс-формах в соответствии с требованиями технологического регламента.

Область использования результатов – автоматизированный расчёт существующего и проектирование нового прессового оборудования вулканизационных гидравлических прессов для производств РТИ.

Вначале рассмотрим математическую модель процесса нагрева одиночной индукционной плиты, с помощью которой осуществляется нагрев пресс-форм и вулканизируемых РТИ.

1. Математическая модель процесса нагрева одиночной индукционной плиты для периода достижения рабочей температуры

Процесс нагрева одиночной индукционной плиты описывается трёхмерным нестационарным дифференциальным уравнением теплопроводности в частных производных

$$\frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \right) + \frac{q(x, y, z, T_{av})}{c_s \cdot \rho_s}, \quad (1)$$

где $T(x, y, z, \tau)$ – температура плиты ($^{\circ}\text{C}$) в точке ее объема с координатами (x, y, z) в момент времени τ ;

$a = \lambda_s / (c_s \cdot \rho_s)$ – коэффициент температуропроводности материала плиты;

λ_s , c_s , ρ_s – теплопроводность ($\text{Вт/м}\cdot\text{К}$), теплоемкость ($\text{Дж/кг}\cdot\text{К}$) и плотность (кг/м^3) материала плиты соответственно;

$$T_{av} = T_{av}(\tau) = \frac{1}{h \cdot s \cdot l} \cdot \int_0^h \int_0^s \int_0^l T(x, y, z, \tau) dx dy dz \quad \text{– средняя температура } (^{\circ}\text{C}) \text{ плиты в}$$

момент времени τ ;

l , s , h – длина, ширина и высота плиты соответственно (м), т.е. $x \in [0; l]$, $y \in [0; s]$, $z \in [0; h]$;

$$q(x, y, z, T_{av}) = \begin{cases} q_{0j}, & \text{если } (x, y, z) \in v_j, j = 1, \dots, ni \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{– зависимость интенсивности}$$

внутренних тепловыделений от координат и средней температуры плиты (Вт/м^3);

q_{0j} – удельная мощность j -го индуктора при средней температуре плиты, Вт/м^3 ;

v_j – объем, в котором выделяется мощность j -го индуктора (м^3);

ni – число индукторов в плите.

Для определения значений q_{0j} , $j=1, \dots, ni$ необходимо решать уравнение Максвелла [6, 7] и находить распределение магнитной индукции вокруг пазов индукторов, причем в [7] показано, что если требуемая температура нагрева плиты не превосходит температуру Кюри (750°C), то задачи определения мощности, выделяемой в пазах индукторов, и распространения тепла в материале плиты можно решать независимо друг от друга. Решение уравнения Максвелла для объекта конечных

размеров при граничных условиях, определяемых размерами и конфигурацией пазов индукторов, затруднительно, поэтому будем считать, что тепловыделение каждого индуктора осуществляется равномерно в объеме паза под него, причем характеристики материала этого объема, заполняемого катушкой индуктора и специальной пастой (например, органосиликатная композиция ОС-82-05 [8]), соответствуют характеристикам материала плиты.

подавляющее большинство отечественных промышленных индукционных нагревательных плит вулканизационных прессов имеют индукторы в форме прямоугольника со скругленными углами, см. рис. 1. Наличие скруглений существенно усложняет решение уравнения (1), поэтому будем считать индукторы прямоугольными, причем общая длина прямоугольного индуктора равна длине реального. Тогда для нижней нагревательной плиты $(x, y, z) \in v_j$, если

$$\begin{aligned} & (hk \leq z \leq hk + g_j) \wedge (((yc_j - 0.5 \cdot s_j \leq y \leq yc_j + 0.5 \cdot s_j) \wedge \\ & ((xc_j - 0.5 \cdot l_j \leq x \leq xc_j - 0.5 \cdot l_j + b_j) \vee (xc_j + 0.5 \cdot l_j - b_j \leq x \leq xc_j + 0.5 \cdot l_j))) \vee \\ & ((xc_j - 0.5 \cdot l_j + b_j \leq x \leq xc_j + 0.5 \cdot l_j - b_j) \wedge ((yc_j - 0.5 \cdot s_j \leq y \leq yc_j - 0.5 \cdot s_j + b_j) \vee \\ & (yc_j + 0.5 \cdot s_j - b_j \leq y \leq yc_j - 0.5 \cdot s_j))))), \end{aligned}$$

где hk – высота крышки плиты (м),

g_j, b_j – глубина и ширина паза под j -й индуктор (м);

l_j, s_j – длина и ширина j -го индуктора (м);

xc_j, yc_j – абсцисса и ордината геометрического центра j -го индуктора (м), причем за точку (0,0) принят левый нижний угол плиты.

$$\text{Следовательно } q_{0j} = \frac{Qi_j}{2b_j \cdot g_j(s_j + l_j - 2b_j)}, \text{ где } Qi_j \text{ – мощность } j\text{-го индуктора.}$$

Значения $Qi_j, j=1, \dots, ni$ при температуре T_{av} будем определять по методике [7], основанной на экспериментальных исследованиях индукционного нагрева ферромагнитной стали. Эта методика предусматривает решение системы уравнений:

$$Qi_j = I_j \cdot U_j \cdot \cos \varphi, \quad (2)$$

где I_j – ток j -го индуктора (А),

U_j – напряжение на j -м индукторе (В),

$$\cos \varphi = \min_j \left\{ \frac{P_{A_j}}{P_{Q_j}} \right\} - \quad (3)$$

коэффициент мощности индукционного нагрева,

$$P_{Qj} = 3,95 \cdot 10^{-6} \cdot Iw_j^2 \cdot f \cdot 2(l_j + s_j) \cdot b_j \cdot g_j + 0,6 \cdot Qi_j - \quad (4)$$

реактивная мощность j -го индуктора (Вт),

f – частота переменного тока в индукторах,

$$Iw_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot H_j \cdot 2 \cdot (b_j + g_j) - \quad (5)$$

магнитодвижущая сила j -го индуктора (ампер-витки),

$$H_j = 31,623 \sqrt{\frac{Qi_j \cdot \eta}{8 \cdot (l_j + s_j) \cdot b_j \cdot \sqrt{\rho_c \cdot \mu_c \cdot f}}} - \quad (6)$$

напряженность магнитного поля в пазу j -го индуктора (А/м),

$$\eta = \min_j \left\{ \frac{Qi_j}{P_{Aj}} \right\} - \quad (7)$$

КПД индукционного нагрева,

$$\rho_c = (2,048 + 0,00494 \cdot T_{av}) \cdot 10^{-7} - \quad (8)$$

удельное электросопротивление материала плиты (Ом·м) (функция получена в результате аппроксимации экспериментальной графической зависимости [7]),

$$\mu_c = 59267,58 \cdot \left[\frac{Qi_j \cdot \eta}{2(l_j + s_j)} \right]^{-0,638} \cdot \left(\frac{\rho_c}{2 \cdot 10^{-7}} \right)^{0,25} - \quad (9)$$

относительная магнитная проницаемость материала плиты,

$$P_{Aj} = I_j^2 \cdot \rho_i \cdot \frac{8 \cdot (l_j + s_j) \cdot n_j}{\pi \cdot di^2} + Qi_j - \quad (10)$$

активная мощность j -го индуктора (Вт),

di – диаметр провода индукторов (м),

ρ_i – удельное электросопротивление материала провода индукторов (Ом·м),

$$n_j = \frac{Iw_j}{I_j} - \quad (11)$$

число проводов в j -м индукторе.

Начальное условие для решения уравнения (1) имеет вид

$$T(x, y, z, 0) = T_0, \quad (12)$$

где T_0 – температура окружающего воздуха, °С.

Форма записи граничных условий определяется конструкцией пресса. При отсутствии изоляции торцов нагревательной плиты, а также контакта ее крышки с нажимной плитой, используются граничные условия (ГУ) третьего рода:

$$\begin{aligned}
 \lambda_s \cdot \frac{\partial T(0, y, z, \tau)}{\partial x} - \alpha_1 \cdot (T(0, y, z, \tau) - T_0) &= 0, \\
 \lambda_s \cdot \frac{\partial T(l, y, z, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 \cdot (T(l, y, z, \tau) - T_0) &= 0, \\
 \lambda_s \cdot \frac{\partial T(x, 0, z, \tau)}{\partial y} - \alpha_3 \cdot (T(x, 0, z, \tau) - T_0) &= 0, \\
 \lambda_s \cdot \frac{\partial T(x, s, z, \tau)}{\partial y} + \alpha_4 \cdot (T(x, s, z, \tau) - T_0) &= 0, \\
 \lambda_s \cdot \frac{\partial T(x, y, 0, \tau)}{\partial z} - \alpha_5 \cdot (T(x, y, 0, \tau) - T_0) &= 0, \\
 \lambda_s \cdot \frac{\partial T(x, y, h, \tau)}{\partial z} + \alpha_6 \cdot (T(x, y, h, \tau) - T_0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha(t_{\text{ст}}) + \frac{\lambda_k}{l_k} \cdot \frac{n_{\text{кс}} \cdot h_k \cdot s_k}{h \cdot s}, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha(t_{\text{ст}}) + \frac{\lambda_k}{l_k} \cdot \frac{n_{\text{кл}} \cdot h_k \cdot s_k}{h \cdot l} -$

комплексные коэффициенты теплоотдачи от торцов плиты, $\alpha_5 = B_n \cdot \alpha(t_{\text{ст}}), \alpha_6 = B_v \cdot \alpha(t_{\text{ст}}) -$ коэффициенты теплоотдачи от рабочей поверхности плиты и поверхности ее крышки соответственно ($\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{К}$);

$\alpha(t_{\text{ст}}) = \alpha_{\text{конв}}(t_{\text{ст}}) + \alpha_{\text{изл}}(t_{\text{ст}}) -$ коэффициент теплоотдачи от поверхностей плиты к окружающему воздуху конвекцией и излучением, значение которого можно определить согласно [9];

$t_{\text{ст}}$ – температура стенки плиты ($^{\circ}\text{C}$);

$n_{\text{кс}}, n_{\text{кл}}$ – число крепежных пластин в торцах плиты, соответствующих ее ширине и длине, соответственно;

λ_k – теплопроводность материала крепежных пластин плиты ($\text{Вт}/\text{м} \cdot \text{К}$);

s_k, h_k, l_k – ширина, высота сечения пластин и длина их части, выходящей за пределы плиты, соответственно (м);

B_n, B_v – коэффициенты, учитывающие неодинаковые условия теплоотвода от нижней и верхней поверхностей плиты, соответственно.

Параметрами (независимыми переменными) математической модели (1)-(13) являются:

- количество индукторов n_i ;
- положение центров индукторов x_c, y_c , (м);
- геометрия индукторов, т.е. длина l_j и ширина s_j каждого из них, ширина b_j и

глубина g_j паза (м),

- число витков индукторов n_j .

При решении модели (1)-(13) необходимо учитывать следующие ограничения:

- в момент времени τ_h , когда температура плиты в месте установки контрольной термопары достигнет заданной, значения температуры в точках рабочей поверхности плиты $T(x,y,h,\tau_h)$ могут отличаться от требуемых $T^*(x,y,h)$ не более чем на заданную величину $\Delta T(x,y)$, т.е.

$$\begin{aligned} |T(x, y, h, \tau_h) - T^*(x, y, h)| &\leq \Delta T(x, y), \\ x &\in [0,025; l - 0,025], y \in [0,025; s - 0,025]; \end{aligned} \quad (14)$$

- время нагрева плиты от начальной температуры до заданной должно быть ограничено (как правило, этот интервал времени задается технологами из соображений обеспечения требуемой производительности), т.е.

$$\tau_{hmin} \leq \tau_h \leq \tau_{hmax}; \quad (15)$$

- значения геометрических параметров индукторов ограничены размерами плиты, правилами их взаимного расположения, а также возможностями изготовления, т.е.

$$b_j \in [b_{jmin}; b_{jmax}], g_j \in [g_{jmin}; g_{jmax}], l_j \in [l_{jmin}; l_{jmax}], s_j \in [s_{jmin}; s_{jmax}], j = 1, \dots, ni; \quad (16)$$

- число витков индуктора ограничено размерами прямоугольного паза, т.е.

$$n_j \leq \frac{4 \cdot b_j \cdot g_j \cdot \chi}{\pi \cdot di^2}, j = 1, \dots, ni, \quad (17)$$

где χ – коэффициент заполнения паза;

- положения центров индукторов должны обеспечивать расстояния от краев плиты до индукторов не менее 5 см, т.е.

$$xc_j \in [0,05 + l_j/2; l - 0,05 - l_j/2], yc_j \in [0,05 + s_j/2; s - 0,05 - s_j/2], j = 1, \dots, ni; \quad (18)$$

- суммарная мощность индукторов не должна превышать заданной максимальной мощности нагревательной плиты Qp_{max} Вт, т.е.

$$\sum_{j=1}^{ni} Qi_j \leq Qp_{max}; \quad (19)$$

- коэффициент мощности и КПД индукционного нагрева не должны быть меньше минимально допустимых значений ($\cos \varphi_{min}$ и η_{min} соответственно), т.е.

$$\cos \varphi \geq \cos \varphi_{min}, \eta \geq \eta_{min}. \quad (20)$$

Решение модели (1)-(20) осложняется нелинейными изменениями во времени мощностей индукторов и коэффициентов теплоотдачи от поверхностей плиты. Поэтому будем считать, что коэффициенты теплоотдачи от всех поверхностей плиты и значения

мощностей индукторов не зависят от температуры в пределах некоторых интервалов времени, которые названы расчётными.

Таким образом, при разработке методики решения математической модели индукционного нагрева плиты вулканизационного пресса (1)-(20) приняты следующие допущения.

1) Тепловыделение каждого индуктора осуществляется равномерно во всем объеме паза плиты, в котором размещен индуктор. Характеристики материала этого объема соответствуют характеристикам материала плиты.

2) Значения параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ и $Q_{ij}, j = 1, \dots, n_i$ не зависят от температуры в пределах расчетных интервалов времени.

3) Значения мощности индукторов при изменении средней температуры плиты определяются по соотношениям (2)-(11).

С учётом этих допущений задача распространения тепла в плите при фиксированных значениях параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ и Q_{ij} решается многократно, т.е. последовательно находятся решения для расчётных интервалов времени, в которых эти параметры можно считать константами. При этом начальным условием для всех решений, кроме первого, будет температурное поле плиты, соответствующее моменту окончания предыдущего интервала времени.

Рис. 2 – Алгоритм решения модели (1)-(20) с помощью МКИП

Алгоритм МКИП, использованный для решения модели (1)-(20), представлен на рис. 2 (подробную методику его применения см. в [10]). В качестве условий окончания предыдущего расчетного интервала времени нагрева и начала следующего использовались неравенства

$$\left| \alpha_k^{\text{pr}} - \alpha_k(\tau) \right| > 0,2 \cdot \alpha_k^{\text{pr}}, \quad k = 1, \dots, 6 \quad \text{и} \quad \left| Qi_j^{\text{pr}} - Qi_j(\tau) \right| > 0,2 \cdot Qi_j^{\text{pr}}, \quad j = 1, \dots, ni,$$

где α_k^{pr} , Qi_j^{pr} – значения k -го коэффициента теплоотдачи и мощности j -го индуктора для предыдущего расчетного интервала времени, $\alpha_k(\tau)$, $Qi_j(\tau)$ – их текущие значения (обоснование см. в [11]). Окончание текущего расчетного интервала времени регистрировалось при выполнении любого из этих условий.

Алгоритм метода конечных элементов (МКЭ), реализованный в системе COMSOL Multiphysics, представлен на рис. 3. Значение шага по времени $\Delta\tau = 2$ с выбрано методом Рунге. Для расчета внутренних тепловыделений индукторов использовалась аналитическая зависимость $Qi(\tau)$, полученная в результате

аппроксимации значений Q_{ij} , $j=1,...,n_i$, полученных по соотношениям (2)-(11) (ее график представлен на рис. 5).

Рис. 3 – Алгоритм решения модели (1)-(20) с помощью МКЭ

На рис. 4 представлены результаты решения модели (1)-(20) для незакрепленной промышленной плиты размерами 500×410 мм начальной мощности 5,5 кВт с четырьмя одинаковыми индукторами (рис. 1) в процессе нагрева от начальной температуры $T_0 = 12\text{ }^{\circ}\text{C}$ до рабочей температуры $170\text{ }^{\circ}\text{C}$, а также результаты промышленного эксперимента, проведенного в ОАО «АРТИ-Завод», г. Тамбов по исследованию процесса нагрева той же плиты с помощью нескольких термопар: по углам и в центре рабочей поверхности (подробнее см. [10]). Результаты приведены для контрольной термопары, расположенной в центре плиты над индукторами. Параметрам модели (1)-(20) были присвоены постоянные значения, соответствующие конструкции исследуемой плиты.

Рис. 4 – Сравнение результатов решения модели (1)-(20) с данными эксперимента

Рис. 5 – Сравнение результатов измерения и расчёта мощности плиты

Сопоставление расчётных и экспериментальных данных (рис. 4) относится к интервалу 0-1968 с (именно за это время температура контрольной термопары в эксперименте достигает заданного значения 170 °С). Максимальное отклонение результатов расчётов от экспериментальных значений температуры контрольной термопары не превышает 5 °С. Результаты измерения мощности плиты в ходе

эксперимента в сравнении с результатами расчёта по соотношениям (2)-(11) представлены на рис. 5. Погрешность расчета мощности индукторов не превысила 3 %.

Из данных рис. 4 и 5 можно сделать вывод, что результаты решения модели (1)-(20) с помощью методики, основанной, как на МКИП, так и на МКЭ, удовлетворительно согласуются с данными эксперимента, проведенного в условиях реального производства, причем разница между результатами расчетов с применением МКИП и МКЭ не превышает 8 %. Таким образом, методика применения системы COMSOL Multiphysics для анализа нестационарного процесса индукционного нагрева адекватна и может быть использована для решения более сложных моделей.

2. Математическая модель процесса нагрева одиночной индукционной плиты для периода поддержания рабочей температуры

В процессе нагрева регулирование температуры плит осуществляется по двухпозиционному закону на основе данных контрольной термопары. Управляющим воздействием является мощность индукторов

$$Qi_j(\tau) = \begin{cases} Qi_j, T_{sensor} \leq T_{down}, \\ Qi_j, T_{down} < T_{sensor} \leq T_{up} \wedge \frac{dT_{sensor}}{d\tau} > 0, \\ 0, T_{down} < T_{sensor} \leq T_{up} \wedge \frac{dT_{sensor}}{d\tau} \leq 0, \\ 0, T_{sensor} \geq T_{up}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, ni, \quad (21)$$

где T_{sensor} – температура контрольной термопары, °C;

T_{up}, T_{down} – верхний и нижний пороги срабатывания регулятора соответственно, °C.

Решение модели (1)-(21) позволяет моделировать процесс нагрева плиты не только в начальный период времени, но и в наиболее важный период регулярного (стационарного) нагрева.

Результаты решения модели (1)-(21) для вышеупомянутой промышленной плиты в системе COMSOL Multiphysics и их сравнение с экспериментальными данными для температур контрольной (кривая 1) и центральной (кривая 2) термопар в начальный период нагрева показаны на рис. 6 (экспериментальные значения для контрольной термопары представлены в виде прямоугольных маркеров, для центральной - в виде треугольных маркеров).

Рис. 6 – Температура контрольной (1) и центральной (2) термопар в начальный период, °C

Из данных рис. 6 следует, что максимальное отклонение расчётных данных от экспериментальных к моменту времени 180 с для контрольной термопары составило 6,1 °C, а для центральной термопары 5,3 °C. Средняя ошибка за весь рассматриваемый период 0-1968 с для контрольной термопары составила 6,6 %, для центральной – 6,9 %. Отметим, что по мере прогрева плиты, начиная с момента времени 1470 с, отклонение температур не превышает 2 % для контрольной термопары и 3 % для центральной. Таким образом, значения расчётных температур обеих термопар удовлетворительно согласуются с полученными в эксперименте.

На рис. 7 представлено сравнение расчётных температур контрольной термопары (кривая 2) с экспериментальными (кривая 1) в течение регулярного режима нагрева. Как видно, график расчётных температур отличается от графика экспериментальных температур только по фазе: отставание расчётной кривой от экспериментальной в среднем составляет 34 с. Для рассматриваемых интервалов времени данная ошибка является незначительной. Можно сделать вывод, что результаты численного решения модели (1)-(21) и в данном случае удовлетворительно согласуются с данными эксперимента.

Рис. 7 – Температура контрольной термопары в регулярном режиме, °C
1 – эксперимент, 2 – расчёт

3. Математическая модель процесса нагрева системы "индукционная плита–пресс-форма–резинотехническое изделие"

Результаты решения моделей (1)-(20), (1)-(21) и их сравнения с экспериментальными данными позволяют перейти к этапу моделирования процесса нагрева многэтажного пресса. Для этого необходимо ввести следующие допущения.

1) Между всеми элементами пресс-форм и изделиями, а также между элементами пресс-форм и нагревательными плитами имеет место идеальный тепловой контакт.

2) Тепловые эффекты вулканизации РТИ незначительны и ими можно пренебречь (справедливость этого допущения для изделий небольшого объема: прокладок, мембран, пробок и т.п. подтверждена расчетами по методике [12]).

Модель (1)-(21) необходимо дополнить уравнениями распространения тепла в пресс-формах и изделиях

$$\rho_m c_m \frac{\partial T_m}{\partial t} - \lambda_m \left(\frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_m}{\partial z^2} \right) = 0, m = 1, \dots, n_{molds}, \quad (22)$$

$$\rho_{rp} c_{rp} \frac{\partial T_{rp}}{\partial t} - \lambda_{rp} \left(\frac{\partial^2 T_{rp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{rp}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_{rp}}{\partial z^2} \right) = 0, rp = 1, 2, \dots, n_{products}, \quad (23)$$

где $T_m = T(x_m, y_m, z_m)$, $(x_m, y_m, z_m) \in \Omega_m$ – температурное поле пресс-форм, °C;

n_{molds} – суммарное количество пресс-форм на всех этажах пресса;

$T_{rp} = T(x_{rp}, y_{rp}, z_{rp})$, $(x_{rp}, y_{rp}, z_{rp}) \in \Omega_{rp}$ – температурное поле в изделиях, °C;

λ_m, c_m, ρ_m – теплопроводность (Вт/м·К), теплоемкость (Дж/кг·К) и плотность (кг/м³) материала пресс-форм, соответственно;

$\lambda_{rp}, c_{rp}, \rho_{rp}$ – теплопроводность (Вт/м·К), теплоемкость (Дж/кг·К) и плотность (кг/м³) материала изделий, соответственно;

Ω_m, Ω_{rp} – объём пресс-форм и РТИ, соответственно;

$n_{productss}$ – общее количество изделий во всех пресс-формах.

В качестве граничных условий для уравнений (22) и (23) используются следующие соотношения.

– Равенство температур и тепловых потоков на границе между пресс-формами и РТИ

$$T_{m.b} = T_{rp.b}, \lambda_m \frac{\partial T_{m.b}}{\partial x} = \lambda_{rp} \frac{\partial T_{rp.b}}{\partial x}, \lambda_m \frac{\partial T_{m.b}}{\partial y} = \lambda_{rp} \frac{\partial T_{rp.b}}{\partial y}, \lambda_m \frac{\partial T_{m.b}}{\partial z} = \lambda_{rp} \frac{\partial T_{rp.b}}{\partial z}. \quad (24)$$

Здесь $T_{m.b} = T(x_{m.b}, y_{m.b}, z_{m.b})$ – температурное поле элементов пресс-форм на границе с изделиями;

$T_{rp.b} = T(x_{rp.b}, y_{rp.b}, z_{rp.b})$ – температурное поле изделий на границе с элементами пресс-форм;

$(x_{m.b}, y_{m.b}, z_{m.b}) \in \Omega_m, (x_{rp.b}, y_{rp.b}, z_{rp.b}) \in \Omega_{rp}$ – множество точек, принадлежащих элементам пресс-форм и изделий на границе их раздела.

– Равенство температур и тепловых потоков между рабочими поверхностями нагревательных плит и матрицами пресс-форм:

$$T_{m.b1} = T_{pl.b2}, \lambda_m \frac{\partial T_{m.b1}}{\partial x} = \lambda_s \frac{\partial T_{pl.b2}}{\partial x}, \lambda_m \frac{\partial T_{m.b1}}{\partial y} = \lambda_s \frac{\partial T_{pl.b2}}{\partial y}, \lambda_m \frac{\partial T_{m.b1}}{\partial z} = \lambda_s \frac{\partial T_{pl.b2}}{\partial z}. \quad (25)$$

Здесь $T_{m.b1} = T(x_{m.b1}, y_{m.b1}, z_{m.b1})$ – температурное поле матриц пресс-форм на границе с плитами;

$T_{pl.b2} = T(x_{pl.b2}, y_{pl.b2}, z_{pl.b2})$ – температурное поле плит на границе с матрицами пресс-форм;

$(x_{m.b1}, y_{m.b1}, z_{m.b1}) \in \Omega_m, (x_{pl.b2}, y_{pl.b2}, z_{pl.b2}) \in \Omega_{plb2}$ – множество точек, принадлежащих матрицам пресс-форм и нагревательных плит на границе их раздела.

– Равенство температур и тепловых потоков между крышками нагревательных плит и пуансонами пресс-форм:

$$T_{m.b2} = T_{pl.b1}, \lambda_m \frac{\partial T_{m.b2}}{\partial x} = \lambda_s \frac{\partial T_{pl.b1}}{\partial x}, \lambda_m \frac{\partial T_{m.b2}}{\partial y} = \lambda_s \frac{\partial T_{pl.b1}}{\partial y}, \lambda_m \frac{\partial T_{m.b2}}{\partial z} = \lambda_s \frac{\partial T_{pl.b1}}{\partial z}. \quad (26)$$

Здесь $T_{m.b2} = T(x_{m.b2}, y_{m.b2}, z_{m.b2})$ – температурное поле пуансонов пресс-форм на границе с крышками;

$T_{pl.b1} = T(x_{pl.b1}, y_{pl.b1}, z_{pl.b1})$ – температурное поле крышек плит на границе с пуансонами пресс-форм;

$(x_{m.b2}, y_{m.b2}, z_{m.b2}) \in \Omega_p, (x_{pl.b1}, y_{pl.b1}, z_{pl.b1}) \in \Omega_{plb1}$ – множество точек, принадлежащих пуансонам пресс-форм и крышкам нагревательных плит на границе их раздела.

– Конвективный ($q_{m.c}$) и лучистый ($q_{m.r}$) тепловой поток от внешних поверхностей пресс-форм в окружающий воздух:

$$q_{m.c} = \alpha_{m.c} \cdot (T_0 - T_{m.s}), \quad (27)$$

$$q_{m.r} = \varepsilon_m \cdot \sigma \cdot (T_0^4 - T_{m.s}^4). \quad (28)$$

Здесь $\alpha_{m.c}$ – коэффициент стеснённой теплоотдачи от поверхностей пресс-форм в окружающий воздух, Вт/м²·К (см. [9]);

$T_{m.s} = T(x_{m.s}, y_{m.s}, z_{m.s})$ – средняя температура внешних поверхностей пресс-формы, °К;

ε_m – степень черноты поверхностей пресс-форм;

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ – постоянная Стефана-Больцмана, Вт/м²·К⁴.

Таким образом, математическую модель нагрева многоэтажного пресса можно представить в виде системы уравнений (1)-(28). К числу ее параметров, кроме параметров конструкции нагревательных плит (см. раздел 1) относятся координаты расположения пресс-форм на поверхности плит. В качестве метода решения модели предлагается использовать МКЭ (система COMSOL Multiphysics).

В качестве примера использования математической модели (1)-(29) приведем результаты ее решения для промышленной плиты 432.383.35, спроектированной и применяемой на ЗАО «Завод Тамбовполимермаш» при производстве резиновых прокладок. Размеры плиты 600х600 мм, начальная мощность 6,5 кВт, значения параметров конструкции плиты введены как константы. На рис. 8а показана геометрическая модель системы, на рис. 8б – расчетное температурное поле продольного сечения прокладки в момент наибольшего перепада температур (5,35 °С – через 5326 с от начала нагрева), на рис. 8в – графики изменения минимальной, средней и максимальной температур изделия. Изменение параметров конструкции нагревательных плит в пределах ограничений (14)-(20), расположения пресс-форм на поверхностях плит, может привести к уменьшению перепада температур в изделиях.

Как видно, методика теплового расчёта систем "индукционная нагревательная плита–пресс-форма–РТИ", основанная на использовании модели (1)-(28) и системы конечноэлементного анализа COMSOL Multiphysics, позволяет анализировать температурное поле РТИ в процессе вулканизации, определять влияние параметров конструкции индукционных нагревательных плит на степень его равномерности, формулировать и решать задачи оптимизации параметров плиты. На основе этой методики в настоящее время разрабатывается система автоматизированного проектирования прессового оборудования для ЗАО "Завод Тамбовполимермаш" и ОАО "АРТИ-завод", г. Тамбов.

1,7 – основания плит; 2,6 – крышки плит; 3,9 – индукторы;
4,5 – матрица и пуансон пресс-формы; 8 – РТИ (прокладка)

Рис 8 – Результаты решения модели (1)-(28)

а) - геометрическая модель системы; б) - температурное поле продольного сечения прокладки, $\tau = 5326$ с, °C ; в) – максимальная (1), средняя (2) и минимальная температура РТИ (3) °C.

Заключение

В статье представлены математические модели индукционного нагрева одиночной плиты вулканизационного гидравлического пресса для периода первоначального разогрева и периода поддержания рабочей температуры, адекватность которых подтверждена сравнением результатов решения с данными промышленного эксперимента. Применение для решения моделей системы конечноэлементного анализа COMSOL Multiphysics обосновано сравнением результатов решения модели нагрева одиночной плиты методами конечных интегральных преобразований и конечных элементов.

Предложена математическая модель процесса индукционного нагрева системы "индукционная нагревательная плита–пресс-форма–резинотехническое изделие", применение которой в совокупности с системой COMSOL Multiphysics позволяет формулировать и решать задачи оптимизации параметров прессового оборудования.

Список литературы

1. Пресс гидравлический вулканизационный 250-600 (1Э, 2Э, 4Э). Режим доступа: http://www.tambovpolymer.ru/katalog_id/33/ (дата обращения 22.12.2012).
2. Дмитриев В.Г., Мананников П.Н. Тепловая модель вулканизационного пресса // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал) . 2002. № 9. С. 182-184.
3. Multiphysics Modeling and Simulation Software - COMSOL. Режим доступа: <http://www.comsol.com/> (дата обращения 22.12.2012).
4. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985. 480 с.
5. Туголуков Е.Н. Решение задач теплопроводности методом конечных интегральных преобразований: учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. 116 с.
6. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
7. Кувалдин А.Б. Индукционный нагрев ферромагнитной стали. М.: Энергоатомиздат, 1988. 200 с.
8. Сайт Морозовского химического завода. Органосиликатная композиция ОС-82-05. Режим доступа: <http://tdmhz.ru/archives/1217/os-82-05/> (дата обращения 22.12.2012).
9. Романков П.Г., Фролов В.Ф., Флисюк О.М., Курочкина М.И. Методы расчета процессов и аппаратов химической технологии. СПб: Химия, 1998. 496 с.
10. Малыгин Е.Н., Карпушкин С.В., Крушати́н А.С. Методика теплового расчёта нагревательных плит прессов для изготовления резинотехнических изделий // Химическая промышленность сегодня. 2009. № 11. С. 48-56.
11. Карпушкин С.В., Карпов С.В., Глебов А.О. Моделирование устройств индукционного нагрева на примере индукционных нагревательных плит вулканизационных прессов (на английском языке) // Вестник Тамбовского ГТУ. 2011. Т. 17, № 1. С. 110-120.
12. Кузнецов Г.В., Иванова Е.В. Математическое моделирование температурных полей в процессе вулканизации типичных кабельных изделий // Известия Томского политехнического университета. 2010. Т. 316, № 4. С. 38-41.

Modeling and calculating processes of induction heating for press equipment during manufacture of rubber products

03, March 2013

DOI: 10.7463/0313.0541632

Malygin E.N., Karpushkin S.V., Karpov S.V.

Russia, Tambov State Technical University

malygin_en@mail.rukarp@mail.gaps.tstu.rug7302@yandex.ru

The authors consider mathematical models of induction heating of a single plate in a hydraulic vulcanizing press for the initial warm-up period and the period of maintaining the operating temperature. They carry out a comparative analysis of an industrial experiment for studying the processes of heating and maintaining the temperature of the working surface of such a plate with the results obtained by solving models with the method of finite integral transformations and with the application of the finite element analysis. For the first time, the authors proposed a mathematical model of the "induction plate-mold-rubber product" system, a technique for approximate solving the model by the finite element method; the model is supposed to be used for solving the optimization problem of press design and molds design, molds positions between the heating plates. The results of solving this problem by the example of the industrial press are provided in this article.

Publications with keywords: [mold](#), [vulcanizing press](#), [induction heating plate](#), [rubber product](#), [the method of final integrated transformations](#)

Publications with words: [mold](#), [vulcanizing press](#), [induction heating plate](#), [rubber product](#), [the method of final integrated transformations](#)

References

1. *Press gidravlicheskij vulkanizacionnyj 250-600 (1Je, 2Je, 4Je)* [Hydraulic vulcanizing press 250-600 (1Э, 2Э, 4Э)]. Available at: http://www.tambovpolimer.ru/katalog_id/33/ , accessed 22.12.2012.
2. Dmitriev V.G., Manannikov P.N. Teplovaja model' vulkanizacionnogo pressa [Thermal model of vulcanising press]. *Gornyj informacionno-analiticheskij bjulleten' (nauchno-tehnicheskij zhurnal)* [Mining informational and analytical bulletin (scientific and technical journal)], 2002, no. 9, pp. 182-184.

3. *Multiphysics Modeling and Simulation Software - COMSOL*. Available at: <http://www.comsol.com/> , accessed 22.12.2012.
4. Kartashov Je.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdyh tel* [Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow, Vysshaja shkola, 1985. 480 p.
5. Tugolukov E.N. *Reshenie zadach teploprovodnosti metodom konechnyh integral'nyh preobrazovanij* [The solution of problems of thermal conductivity by the method of finite integral transformation]. Tambov, TSTU Publ., 2005. 116 p.
6. Koshljakov N.S., Gliner Je.B., Smirnov M.M. *Uravenija v chastnyh proizvodnyh matematicheskoy fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow, Vysshaja shkola, 1970. 712 p.
7. Kuvaldin A.B. *Indukcionnyj nagrev ferromagnitnoj stali* [Induction heating of ferromagnetic steel]. Moscow, Jenergoatomizdat, 1988. 200 p.
8. *Sajt Morozovskogo himicheskogo zavoda. Organosilikatnaja kompozicija OS-82-05*. [Website of Morozov chemical plant. Organosilicate composition OS-82-05.]. Available at: <http://tdmhz.ru/archives/1217/os-82-05/> , accessed 22.12.2012.
9. Romankov P.G., Frolov V.F., Flisjuk O.M., Kurochkina M.I. *Metody rascheta processov i apparatov himicheskoy tehnologii* [Methods of calculation of processes and devices of chemical technology]. St. Petersburg, Himija, 1998. 496 p.
10. Malygin E.N., Karpushkin S.V., Krushatin A.S. Metodika teplovogo raschjota nagrevatel'nyh plit pressov dlja izgotovlenija rezinotekhnicheskikh izdelij [Thermal calculation's technique of heating plates for presses, manufacturing mechanical rubber goods]. *Himicheskaja promyshlennost' segodnja* [Chemical industry today], 2009, no. 11, pp. 48-56.
11. Karpushkin S.V., Karpov S.V., Glebov A.O. Modelirovanie ustrojstv indukcionnogo nagreva na primere indukcionnyh nagrevatel'nyh plit vulkanizacionnyh pressov (na anglijskom jazyke) [Modeling of induction heating devices in example of induction heating platens of vulcanization presses (in English)]. *Vestnik Tambovskogo GTU* [Bulletin of TSTU], 2011, vol. 17, no. 1, pp. 110-120.
12. Kuznecov G.V., Ivanova E.V. Matematicheskoe modelirovanie temperaturnyh polej v processe vulkanizacii tipichnyh kabel'nyh izdelij [Mathematical simulation of temperature fields in the process of vulcanization of typical cable products]. *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University], 2010, vol. 316, no. 4, pp. 38-41.