Взаимодействие твердых тел в колебательных системах с упругими связями и сочленениями при действии внешнего вибрационного возмущения

01, январь 2013

DOI: 10.7463/0113.0486817

Елисеев С. В., Пискунова В. А., Савченко А. А.

УДК 62.752

Россия, НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования,
Иркутский государственный университет путей сообщения.

eliseev_s@inbox.ru

zefa86@mail.ru

dukacheva_oo@irgups.ru

Введение. Сочленения, реализуемые кинематическими парами вращения V класса, обеспечивают возможности совершать твердым телам (или звеньям) в структуре механической колебательной системы возвратно – вращательные движения друг относительно друга или относительно неподвижного основания. Твердое тело, присоединенное к объекту защиты, может играть роль динамического гасителя колебаний. В теории и практике виброзащиты и виброизоляции известны маятниковые и рычажные устройства. Твердое тело может входить в систему одной или несколькими точками соединения с элементами других систем [1÷3].

Некоторые примеры возможных сочленений приведены на рис. 1 [4].

Рис. 1. Принципиальные схемы механических колебательных систем с сочленениями: а) система с тремя степенями свободы и одним сочленением; б) Г-образный (маятниковый) гаситель колебаний (одно сочленение); в) система с одной степенью свободы – одно сочленение с подвижным основанием; г) многосвязная механическая цепь (два сочленения); д) система с сочленениями в рычажный механизм

Для исследования динамики систем с сочлененными твердыми телами используются различные способы, в частности, можно в месте предполагаемого сочленения вращательного типа ввести обобщенную координату, характеризующую относительное смещение, а упругую (или другую) связь после построения математической модели сделать очень большой по величине (упругость, демпфирование, инерционное взаимодействие). Тогда две координаты, характеризующие относительное движение, могут в пределе «слиться» в одну, а система «потеряет» одну степень свободы движения. Предпосылкой такого подхода можно было бы считать рассмотрение каскадных виброзащитных систем, а также задачу виброзащиты и виброизоляции, в которых принимается во внимание локальная упругость места закрепления виброизолятора или амортизатора [5].

Поскольку унифицированная форма дифференциальных уравнений может использовать любые системы обобщенных координат, в том числе и координаты относительных смещений, то возникает вопрос, как в матрице коэффициентов уравнений члены можно было бы трансформировать на основе допустимых правил преобразования [6]. Вводя новые переменные, которые могут стать нулевыми, можно соответствующие столбец и матрицу исключить, что в физическом смысле означает введение сочленения. При этом число степеней свободы уменьшается. Дальнейшее исследование системы проводится обычными способами, но на упрощенной схеме. Физически это означает, что относительное движение между некоторыми точками ограничивается параметрами

соединяющего звена, например, жесткость в соединении на несколько порядков выше, чем в других соединениях. Тогда система начинает колебаться как система с меньшим числом степеней свободы, что достаточно известно в инженерной практике. Собственно на приведенных представлениях и основаны подходы к выбору, обоснованию и упрощению расчетных схем систем вибрационной защиты объектов.

I. Постановка задачи исследования. Общие положения. Рассмотрим механическую колебательную систему с четырьмя степенями свободы, представленной на рис. 2. Такая схема может отражать, например взаимодействие перевозимого подпружиненного груза в кузове автомобиля, и в целом имеет 4 степени свободы.

Рис. 2. Схема взаимодействия систем с 4 степенями свободы

Интерес представляет создание технологии построения моделей, которые позволили учитывать влияние на динамические свойства особенностей крепления упругих элементов с жесткостями k_3 и k_0 (точки A_2 и A_1 , а также т. B).

Возможные варианты преобразования колебательных систем в системы с сочленениями представлены на рис. 3, на котором показаны возможные точки соединений, превращающихся в сочленения. Так при $k_0 \rightarrow \infty$, точки B_1 и B_2 (рис. 3, а) могут формировать сочленение; а также A_1 и A_2 при $k'_0 \rightarrow \infty$, C_1 и C_2 при $k_2 \rightarrow \infty$. В случае $k'_0 \rightarrow \infty$, $k_0 \rightarrow \infty$ и $k_2 \rightarrow \infty$ можно получить схему известного динамического гасителя колебаний [7]. Вводя координаты относительного смещения для схемы на рис. 3, а, $y_A = y_{A1} - y_{A2}$, при $y_A \rightarrow \infty$, можно получить схему на рис. 3, б и т.д. То есть, выбирая точки сочленения, можно получить достаточно большое число вариантов схем, среди которых можно обнаружить расчетные схемы многих известных ВЗС [51].

Рис. 3. Принципиальные схемы механических колебательных систем, в которых при $k'_0 \rightarrow \infty$, $k_0 \rightarrow \infty$ и $k_2 \rightarrow \infty$ могут возникнуть сочленения

II. Сочленения в балочной системе с двумя степенями свободы.

Рассмотрим балочную систему с двумя степенями свободы, обращая внимание на возможности введения сочленений в некоторых точках путем их «смещения». На расчетной схеме рис. 4. это возможность представляется для случаев совпадения точек A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , когда система теряет одну степень свободы, но сочленение в форме кинематической пары V класса или вращательного шарнира дает возможность твердому телу совершать возвратно-колебательные движения соответственно вокруг точек A и B . В дальнейшем будут рассмотрены возможности сочленений не только в системе координат y_1 и y_2 , но и в других системах координат. Отметим, что кроме сочленений в точках A и B возможно рассмотрение ограничений движения по координатам т. A_2 и т. B_2 одновременно, что может быть определено условием $y_2 - y_1 = 0$. В этом случае система (рис. 4) превращается в систему с одной степенью свободы и совершает вертикальные поступательные движения на упругом элементе с жесткостью $k_1 + k_2$.

Рис. 4. Расчетная схема системы, имеющей две упругие опоры и совершающей движение в системе координат y_1, y_2

Для схемы, приведенной на рис. 4, запишем уравнения кинетической и потенциальной энергий

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}_0^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2, \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - z_2)^2. \quad (2)$$

где y_1, y_2 – координаты точек A_1 и B_2 в условно неподвижной (абсолютной) системе координат; y_0 – координата центра тяжести; φ – угол поворота относительно центра тяжести (точки O); J – момент инерции относительно центра тяжести (точки O); M – масса балки; Соответственно $l_1 = A_2O, l_2 = B_2O$.

Введем ряд вспомогательных обозначений и соотношений:

$$a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}; b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}; d = \frac{1}{l_1 + l_2}; y_1 = y_0 - l_1 \varphi; y_2 = y_0 + l_2 \varphi. \quad (3)$$

1. Координаты y_0, φ . Используя подходы, изложенные в [6], запишем дифференциальные уравнения движения для системы, приведенной на рис. 4 в системе координат y_0 и φ

$$\ddot{y}_0 M + y_0 k_1 + k_2 y_0 - k_1 l_1 \varphi + k_2 l_2 \varphi = k_1 z_1 + k_2 z_2, \quad (4)$$

$$J \ddot{\varphi} + k_1 l_1^2 \varphi + k_2 l_2^2 \varphi - k_1 l_1 y_0 + k_2 l_2 y_0 = k_2 l_2 z_2 - k_1 l_1 z_1. \quad (5)$$

Построим структурную схему эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (Рис. 5).

Рис. 5. Структурная схема эквивалентной в динамическом отношении САУ для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, в системе координат y_0 и φ

Эта система имеет кинематическое возмущение (z_1 и z_2), что может привести, в определенных ситуациях, к появлению режимов динамического гашения. Для системы характерны упругие перекрестные связи.

2. Координаты y_1, y_2 . Для расчетной схемы, приведенной на рис. 7 запишем уравнение движения в системе координат y_1 и y_2

$$\ddot{y}_1(Ma^2 + Jd^2) + \ddot{y}_2(Mab - Jd^2) + k_1 y_1 = k_1 z_1, \quad (6)$$

$$\ddot{y}_2(Mb^2 + Jd^2) + \ddot{y}_1(Mab - Jd^2) + k_2 y_2 = k_2 z_2. \quad (7)$$

При этом матричная структура (6), (7) имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} Ma^2 + Jd^2 & Mab - Jd^2 \\ Mab - Jd^2 & Mb^2 + Jd^2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} k_1 z_1 \\ k_2 z_2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, в координатах y_1 и y_2 примет вид, как показано на рис. 6.

Рис. 6. Структурная схема эквивалентной в динамическом отношении САУ для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, в системе координат y_1 и y_2

Для рассматриваемой системы изменяется характер перекрестных связей – они становятся инерционными. Вместе с этим изменяются и внешние воздействия, которые теперь действуют на парциальных системах адресно (рис. 6), по сравнению со структурой на Рис. 5.

3. Координаты y_1 , φ . Для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, запишем уравнения движения в системе координат y_1 и φ :

$$\ddot{y}_1 M + M l_2 \ddot{\varphi} + k_1 y_1 + k_2 y_1 + k_2 (l_1 + l_2) \varphi = k_1 z_1 + k_2 z_2, \quad (8)$$

$$\ddot{y}_1 M l_2 + (J + M l_2^2) \ddot{\varphi} + k_2 (l_1 + l_2) y_1 + k_2 (l_1 + l_2)^2 \varphi = k_2 (l_1 + l_2) z_2. \quad (9)$$

Структурная схема эквивалентной в динамическом отношении САУ для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, в координатах y_1 и φ примет вид, как показано на рис. 7. Особенность структурной схемы заключается в том, что перекрестные связи приобретают упруго-инерционный характер и могут «обнуляться» на определенных частотах, а внешнее возмущение действует только на один вход.

Рис. 7. Структурная схема эквивалентной в динамическом отношении САУ для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, в системе координат y_1 и φ

4. Координаты y_2 , φ . Для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, запишем уравнения движения в системе координат y_2 и φ :

$$\ddot{y}_2 M + M l_1 \ddot{\varphi} + k_1 y_2 + k_2 y_2 + k_1 (l_1 + l_2) \varphi = k_1 z_1 + k_2 z_2, \quad (10)$$

$$\ddot{y}_2 M l_1 + (J + M l_1^2) \ddot{\varphi} + k_1 (l_1 + l_2) y_2 + k_2 (l_1 + l_2)^2 \varphi = k_1 (l_1 + l_2) z_2. \quad (11)$$

Структурная схема эквивалентной в динамическом отношении САУ для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, в координатах y_2 и φ примет вид, как показано на рис. 8.

Рис. 8. Структурная схема эквивалентной в динамическом отношении САУ для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, в системе координат y_2 и φ

Отметим, что изменения обобщенных координат приводит к изменению в передаточных функциях перекрестных связей, что связано и с изменением частот в режимах динамического гашения.

V. Координаты y_0 , y_1 . Для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, запишем уравнения движения в системе координат y_0 и y_1 :

$$(Ml_2^2 + J) \ddot{y}_0 - J \ddot{y}_1 + k_2 (l_1 + l_2)^2 y_0 - k_2 l_1 (l_1 + l_2) y_1 = k_2 l_2 (l_1 + l_2) z_2, \quad (12)$$

$$-J \ddot{y}_0 + J \ddot{y}_1 + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) y_1 - k_2 l_1 (l_1 + l_2) y_0 = k_1 l_2^2 z_1 - k_2 l_1^2 z_2. \quad (13)$$

Структурная схема эквивалентной в динамическом отношении САУ для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, в координатах y_0 и y_1 примет вид, как показано на рис. 9, что отражает изменения как в перекрестных связях, так и параметрах парциальных систем.

Рис. 9. Структурная схема эквивалентной в динамическом отношении САУ для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, в системе координат y_0 и y_1

VI. Координаты y_{01} , y_2 . Введем систему координат y_{01} и y_2 , для этого произведем следующие преобразования: $y_I - z_I = y_{01}$, так как $y_I = y_0 - l_I \varphi$ соответственно $y_0 = (z_I + y_0)a + az_I$; $y_0 = az_I + ay_0 + y_2b$; $\varphi = d(y_2 - y_I) = dy_2 - dz_I - dy_{01}$. Запишем выражение (1) и (2) для кинетической и потенциальной энергии с учетом системы координат y_{01} и y_2

$$T = T_1 + T_2, \quad (14)$$

$$\text{где } T_1 = \frac{1}{2} M (a\dot{z}_1 + \dot{y}_{01}a + \dot{y}_2b)^2; \quad T_2 = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} J d^2 (\dot{y}_2 - \dot{z}_1 - \dot{y}_{01})^2.$$

$$\text{Преобразуем выражение (2) к виду: } \ddot{I} = \frac{1}{2} k_1 y_{01}^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - z_2)^2. \quad (15)$$

Для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, запишем уравнения движения в системе координат y_{01} и y_2 :

$$(Ma^2 + Jd^2)\ddot{y}_{01} + y_{01}k_1 + \ddot{y}_2(Mab - Jd^2) = \ddot{z}_1(-Ma^2 - Jd^2), \quad (16)$$

$$(Mb - Jd^2)\ddot{y}_{01} + \ddot{y}_2(Mb + Jd^2) + y_2k_2 = k_2z_2 + \ddot{z}_1(-Mab + Jd^2). \quad (17)$$

VII. Координаты y_{01} , y_I . Для расчетной схемы, приведенной на рис. 4, запишем уравнения движения в системе координат y_{01} и y_I , используя выше приведенные действия:

$$(Mb^2 + Jd^2)\ddot{y}_{02} + y_{02}k_2 + \ddot{y}_2(Mab - Jd^2) = \ddot{z}_2(-Mb^2 + Jd^2), \quad (18)$$

$$(Mab - Jd^2)\ddot{y}_{02} + \ddot{y}_2(Ma^2 + Jd^2) + y_2k_2 = \ddot{z}_2(-Mba - Jd^2) + k_1z_1. \quad (19)$$

VIII. Сравнительный анализ. В таблице 1 приведены коэффициенты рассмотренных уравнений, приведенных к унифицированной форме в различных системах координат.

Варианты введения сочленений, соответственно представленных в таблице 1, приведены на рис. 10.

Табл. 1

Коэффициенты уравнений движения в различных системах координат

Система координат y_0 и φ			Система координат y_1 и y_2		
Коэффициенты уравнений		b_i	Коэффициенты уравнений		b_i
a_{11}	a_{12}	b_1	a_{11}	a_{12}	b_1
$Mp^2 + k_1 + k_2$	$-k_1 l_1 + k_2 l_2$	$k_1 z_1 + k_2 z_2$	$(Ma^2 + Jd^2)p^2 + k_1$	$(Mab - Jd^2)p^2$	$k_1 z_1$
a_{21}	a_{22}	b_2	a_{21}	a_{22}	b_2
$-k_1 l_1 + k_2 l_2$	$Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2$	$-k_1 l_1 z_1 + k_2 l_2 z_2$	$(Mab - Jd^2)p^2$	$(Mb + Jd^2)p^2 + k_2$	$k_2 z_2$
Система координат y_1 и φ			Система координат y_2 и φ		
Коэффициенты уравнений		b_i	Коэффициенты уравнений		b_i
a_{11}	a_{12}	b_1	a_{11}	a_{12}	b_1
$Mp^2 + k_1 + k_2$	$ML_2 p^2 + k_2(l_1 + l_2)$	$k_1 z_1 + k_2 z_2$	$Mp^2 + k_1 + k_2$	$ML_1 p^2 + k_1(l_1 + l_2)$	$k_1 z_1 + k_2 z_2$
a_{21}	a_{22}	b_2	a_{21}	a_{22}	b_2
$ML_2 p^2 + k_2(l_1 + l_2)$	$(J + ML_2^2)p^2 + k_2(l_1 + l_2)^2$	$k_2(l_1 + l_2)$	$ML_1 p^2 + k_1(l_1 + l_2)$	$(J + ML_1^2)p^2 + k_1(l_1 + l_2)^2$	$k_1(l_1 + l_2)$
Система координат y_0 и y_1			Система координат y_{01} и y_2 ($y_{01} = y_1 - z_1$)		
Коэффициенты уравнения		b_i	Коэффициенты уравнения		b_i
a_{11}	a_{12}	b_1	a_{11}	a_{12}	b_1
$(ML_2^2 + J)p^2 + k_2(l_1 + l_2)^2$	$-Jp^2 - k_2(l_1 + l_2)l_1$	$k_2 l_2(l_1 + l_2)z_2$	$(Ma^2 + Jd^2)p^2 + k_1$	$(Mab - Jd^2)p^2$	$(-Ma^2 - Jd^2)p^2 \times z_1$
a_{21}	a_{22}	b_2	a_{21}	a_{22}	b_2
$-Jp^2 - k_2(l_1 + l_2)l_1$	$Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2$	$k_1 l_2^2 z_1 + k_2 l_1^2 z_2$	$(Mab - Jd^2)p^2$	$(Mb^2 + Jd^2)p^2 + k_2$	$(-Mab + Jd^2)p^2 \times z_1 + k_2 z_2$
Система координат y_{01} и y_1 ($y_{02} = y_2 - z_2$)					
Коэффициенты уравнений				b_i	
a_{11}		a_{12}		b_1	
$(Mb^2 + Jd^2)p^2 + k_2$		$(Mab - Jd^2)p^2$		$(-Mb^2 + Jd^2)z_2$	
a_{21}		a_{22}		b_2	
$(Mab - Jd^2)p^2$		$(Ma^2 + Jd^2)p^2 + k_1$		$(-Mab - Jd^2)p^2 z_2 + k_1 z_1$

Рис. 10. Варианты введения сочленения в системе с двумя степенями свободы (на рис. 4) (варианты поясняются по тексту)

Расчетные схемы частного вида могут быть получены путем исключения столбца и строки в соответствующей матрице, связанной с системой координат: 1) y_0, φ - рис. 10 а, б; 2) y_1, y_2 - рис. 10 в, г; 3) $y_{01} = 0, y_2 \neq 0$ ($y_{01} = y_1 - z_1$) - рис. 10 д; 4) $y_{02} = 0, y_1 \neq 0$ ($y_{02} = y_2 - z_2$) - рис. 10 е; 5) $y'_0 = 0, y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$ ($y'_0 = y_0 - z$) - рис. 10 ж; 6) $y'_A = (y_A - z), y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$ - рис. 10 з – точка А находится между центром тяжести и левой упругой опорой; 7) $y'_B = (y_B - z), y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$ - рис. 10 и – точка В находится за пределами левой упругой опорой. В каждом из рассмотренных случаев, то есть каждому варианту сочленения соответствует своя математическая модель. Отметим, что в схемах, в которых одновременно $y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$, необходимо принимать во внимание зависимость между координатами, определяемую рычажными связями. Особый случай представляет собой выбор в качестве сочленения точек А и В, которые либо находятся между точками закрепления упругих элементов или выходят за пределы этого пространства, что требует учета особенностей координат в механической системы, которые можно было бы назвать точками наблюдения. В данной ситуации точка наблюдения рассматривается как точка возможного сочленения.

III.

Особенности динамических свойств.

Используя матрицы коэффициентов для систем, представленных в таблице 2, можно методом исключения столбцов и строк получить математические модели для любого частного случая. Рассмотрим в качестве примера, задачу составления математической модели для расчетной схемы на рис. 11, что соответствует работе системы на рис. 4 в координатах y_{01} и y_2 . Отметим, что $y_{01} = y_1 - z_1$. используя соотношения $y_0 = ay_1 - by_1$ и $\varphi = d(y_2 - y_1)$ Тогда

$$y_0 = [a(y_{01} + z_1) + by_2] = az_1 + y_{01}a + y_2b \quad (20)$$

Рис. 11. Расчетная схема ВЗС в системе координат y_{01} и y_2

Подставляя (20) в выражения (1) и (2) получим:

$$T = \frac{1}{2}M(a\dot{z}_1 + \dot{y}_{01}a + \dot{y}_2b)^2 + \frac{1}{2}Jd^2(\dot{y}_2 - \dot{y}_{01} - \dot{z}_1)^2, \quad (21)$$

$$\ddot{I} = \frac{1}{2}k_1y_{01}^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2. \quad (22)$$

Система уравнений движения в рассматриваемом случае принимает вид

$$(Ma^2 + Jd^2)\ddot{y}_{01} + y_{01}k_{01} + \ddot{y}_1(Mab - Jd^2) = \ddot{z}_2(-Ma^2 - Jd^2), \quad (23)$$

$$(Mab - Jd^2)\ddot{y}_{01} + \ddot{y}_2(Mb^2 + Jd^2) + y_2k_2 = \ddot{z}_2(-Mba - Jd^2) + k_2z_2, \quad (24)$$

что совпадает с уравнением (15).

В системе на рис. 11 частота собственных колебаний определяется по формуле

$$\omega_{cob}^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jd^2}. \quad (25)$$

Если принять, что $z_1 = z_2 = z$, то в системе на рис. 11, возможен режим динамического гашения на частоте

$$\omega_{дин}^2 = \frac{k_2}{Jd^2 - Mab}. \quad (26)$$

Передаточная функция системы имеет вид

$$W(p) = \frac{y_2(p)}{z(p)} = \frac{(Jd^2 - Mab)p^2 + k_2}{(Mb^2 + Jd^2)p^2 + k_2}. \quad (27)$$

На высоких частотах система запирается и

$$\left| W(p) \right|_{p \rightarrow \infty} = \frac{Jd^2 - Mab}{(Mb^2 + Jd^2)}. \quad (28)$$

Амплитудно-частотная характеристика системы, представлена в соответствии с (34) и имеет вид как на рис. 12.

Рис. 12. Амплитудно-частотная характеристика системы, расчетная схема которой приведена на рис. 11.

По вариантам введения сочленений в таблице 2 приведена информация по возможных режимах работы (частотный аспект).

Табл. 2

**Частотные свойства режимов для системы с различными системами координат ВЗС,
получаемых через введение сочленения представленной на схеме рис. 4**

Система координат	Частота собственных колебаний	Частота динамического гашения	Запирание на высоких частотах	Примечания (вид сочленения)
1	2	3	4	5
y_0 и φ	$\omega_{cob}^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{J}$	-	-	Сочленение Находится в точке О (шарнир)
y_1 и y_2	$\omega_{cob}^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jd^2}$	-	-	Сочленение $y_1 = 0$
	$\omega_{cob}^2 = \frac{k_1}{Ma^2 + Jd^2}$	-	-	Сочленение $y_1 = 0$
y_1 и φ	$\omega_{cob}^2 = \frac{k_2 (l_1 + l_2)^2}{J + Ml_2^2}$	-	-	Сочленение $y_1 = 0$
y_2 и φ	$\omega_{cob}^2 = \frac{k_1 (l_1 + l_2)^2}{J + Ml_1^2}$	-	-	Сочленение $y_1 = 0$
y_0 и y_1	$\omega_{cob}^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{Jd^2}$	-	-	Сочленение $y_0 = 0$
	$\omega_{cob}^2 = \frac{k_2 (l_1 + l_2)^2}{Ml_2^2 + Jd^2}$	-	-	Сочленение $y_1 = 0$
y_0 и y_2	$\omega_{cob}^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{Jd^2}$	-	-	Сочленение $y_0 = 0$
	$\omega_{cob}^2 = \frac{k_1 (l_1 + l_2)^2}{Ml_1^2 + Jd^2}$	-	-	Сочленение $y_2 = 0$
y_{01} и y_2	$\omega_{cob}^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jd^2}$	$\omega_{a\dot{e}i}^2 = \frac{k_2}{Jd^2 - Mab}$	$\frac{Jd^2 - Mab}{Mb^2 + Jd^2}$	Сочленение $y_{01} = 0$ $z_1 = z_2 = z$ $y_{01} = y_1 - z_1$
	$\omega_{cob}^2 = \frac{k_1}{Ma^2 + Jd^2}$	-	$\frac{Jd^2 - Mab}{Mb^2 + Jd^2}$	Сочленение $y_0 = 0$ $z_1 = z_2 = z$

Перечень вариантов введения сочленений может быть дополнен системами координат:

y'_{01} и y_1 , где ($y'_{01} = y_0 - z_1$ и y_2); y'_{01} и y_1 , где ($y'_{01} = y_0 - z_z$ и y_2) и др.

IV. Заключение. Введение сочленений в различных вариантах на основе упрощения исходной расчетной схемы (рис. 4) позволяет сформировать и систематизировать класс математических моделей, полученных по определенной методике из систем балочного типа. Вместе с тем, любая модель из этого класса может быть получена и автономно, однако методика составления дифференциальных уравнений в каждом таком случае будет требовать учета ряда специфических деталей. Связь координат y_1 и y_2 (и других), сама по себе, отражает сочленения, создаваемые виртуальными массами, $Ma^2 + Jd^2$, $Mb^2 + Jd^2$, которые появляются при преобразованиях и являются приведенными массоинерционными параметрами по отношению к твердому телу в виде балки. Отметим также, что соединения виртуальных масс двух элементов в механической системе появляется надобность в рычаге. В свою очередь, место закрепления упругих элементов разнесено на балке, что также формирует рычажные связи.

Список литературы

1. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В. Обобщенные подходы к построению математических моделей механических систем с Г-образными динамическими гасителями колебаний // Системы. Методы. Технологии. – Братск: БрГУ, 2011. – Вып. 1 (9). – С. 9-24.
2. Елисеев С.В. Динамический гаситель колебаний как средство управления динамическим состоянием виброзащитной системы // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.– 2011.– № 8.– Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/204765.html> (дата обращения 10.04.2012).
3. Елисеев С.В. и др. Рычажные связи в задачах динамики механических колебательных систем. Теоретические аспекты / ИрГУПС.– Иркутск, 2009. – 159 с. – Деп. в ВИНТИ. 27.11.09. № 737–В 2009.
4. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Виброзащитные системы с сочленениями. Технология построения математических моделей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование.– Иркутск: ИрГУПС, 2010. – Вып. 3 (27). – С. 8–18.
5. Вибрация в технике : Справочник. В 6 т. Т. 6. Защита от вибраций и ударов / под. ред. К.В. Фролова.– М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.

6. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в задачах динамики колебательных систем. – Новосибирск: Наука, 2011. – 394 с.
7. Трофимов А.Н. Об оценке свойств вычажных динамических гасителей колебаний // Системы. Методы. Технологии. – Братск: БрГУ, 2011. – Вып. 3 (11). – С. 45-60.
8. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Сочленения в виброзащитных системах как процесс уменьшения числа степеней свободы движения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: ИрГУПС, 2010. – Вып. 4 (28). – С. 8-15.

Interaction of rigid bodies in oscillatory systems with elastic linkages and couplings under external vibrations

01, January 2013

DOI: 10.7463/0113.0486817

Eliseev S.V., Piskunova V.A., Savchenko A.A.

Russia. Science educational center of modern technologies, system analysis and modelling,
Irkutsk State Transport University

eliseev_s@inbox.ru

zefa86@mail.ru

dukacheva_oo@irgups.ru

The authors propose a technique of creating various mathematical models of mechanical oscillatory systems with two degrees of freedom with elastic supports and a rigid body for protection against vibrations. The problem is solved by selection of corresponding motion coordinates. It is supposed that after realization of a system of joints between the rigid body and the base of the system, choice of corresponding coordinates is made. Those coordinates describe relative movement between two selected points. After transformation of a mathematical model and the setting coordinate of relative movement equal to zero, the system loses one degree of freedom. The mathematical model of the system is simplified; it allows one to estimate dynamical properties of the system from the required point of view. The proposed method also allows one to search for and estimate new constructional and technical solutions in the field of protection against vibration and vibration isolation of technical systems.

Publications with keywords: [dynamical absorbers of oscillations](#), [couplings in mechanical oscillation systems](#), [mathematical models of vibroprotection systems](#), [creature of mathematical models of vibroprotection systems](#)

Publications with words: [dynamical absorbers of oscillations](#), [couplings in mechanical oscillation systems](#), [mathematical models of vibroprotection systems](#), [creature of mathematical models of vibroprotection systems](#)

References

1. Eliseev S.V., Belokobyl'skii S.V. Obobshchennye podkhody k postroeniiu matematicheskikh modelei mekhanicheskikh sistem s L-obraznymi dinamicheskimi gasiteliami kolebanii

- [Generalized approaches to building of mathematical models of mechanical systems with L-shaped dynamic oscillation dampers]. *Sistemy. Metody. Tekhnologii* [Systems. Methods. Technologies]. Bratsk, BrSU Publ., 2011, no. 1 (9), pp. 9-24.
2. Eliseev S.V. Dinamicheskii gasitel' kolebanii kak sredstvo upravleniia dinamicheskim sostoianiem vibrozashchitnoi sistemy [Dynamical absorbtion of oscillations as means of control of dynamical condition of vibroprotection system]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Bauman* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 8. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/204765.html> , accessed 10.04.2012.
3. Eliseev S.V., et al. *Rychazhnye svyazi v zadachakh dinamiki mekhanicheskikh kolebatel'nykh sistem. Teoreticheskie aspekty* [Lever relations in problems of dynamics of mechanical oscillatory systems. Theoretical aspects]. Irkutsk, IrGUPS, 2009. 159 p. Dep. VINITI no. 737-V 2009.
4. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Vibrozashchitnye sistemy s sochleneniiami. Tekhnologiiia posroeniia matematicheskikh modelei [Vibroprotective systems with joints. Techniques of building of mathematical models]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern technology. Systems analysis. Simulation]. Irkutsk, IrGUPS Publ., 2010, no. 3 (27), pp. 8–18.
5. Frolov K.V., ed. *Vibratsiia v tekhnike : Spravochnik. V 6 t. T. 6. Zashchita ot vibratsii i udarov* [Vibration in Engineering: Handbook. In 6 vols. Vol. 6. Protection against vibrations and shocks]. Moscow, Mashinostroenie, 1981. 456 p.
6. Eliseev S.V., Reznik Iu.N., Khomenko A.P. *Mekhatronnye podkhody v zadachakh dinamiki kolebatel'nykh system* [Mechanotronic approaches in problems of dynamics of oscillatory systems]. Novosibirsk, Nauka, 2011. 394 p.
7. Trofimov A.N. Ob otsenke svoistv vychazhnykh dinamicheskikh gasitelei kolebanii [About estimation of properties of lever dynamic oscillation dampers]. *Sistemy. Metody. Tekhnologii* [Systems. Methods. Technologies]. Bratsk, BrSU Publ., 2011, no. 3 (11), pp. 45-60.
8. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Sochleneniia v vibrozashchitnykh sistemakh kak protsess umen'sheniia chisla stepenei svobody dvizheniia [Joints in vibroprotective systems as a process of decrease of number of degrees of freedom of movement]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern technology. Systems analysis. Simulation]. Irkutsk, IrGUPS Publ., 2010, no. 4 (28), pp. 8-15.