Аналитическое решение контактной задачи об упругих деформациях тонкой пластины, помещенной в цилиндрическую полость

01, январь 2013

DOI: 10.7463/0113.0517977

Дмитриев С. Н.

УДК 539.3:62-27

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

dim.sm2@yandex.ru

Постановка задачи

Рассмотрим тонкую прямоугольную пластину (рис. 1) с размерами $a \times b$ в плане и толщиной $h \ll \min(a, b)$.

Рис. 1

Пусть каким-либо образом, например, путем приложения распределенного изгибающего момента постоянной интенсивности вдоль двух противоположных кромок длиной b , пластина свернута в цилиндр радиуса R и помещена в цилиндрическую полость того же радиуса (рис. 2).

Рис. 2

При таком сворачивании перемещения точек пластины оказываются сопоставимыми с габаритными размерами пластины. В работе [1] В.Д. Черненко получил аналитическое решение данной задачи в предположении, что пластина плотно прилегает к полости по всей поверхности. Техническое приложение решения дано в [2], где определены величины контактных усилий, возникающих при изгибе и сворачивании в цилиндр резинокордной конвейерной ленты. Предположение о плотном прилегании применимо в тех случаях, когда изгибная жесткость пренебрежимо мала по сравнению с жесткостью на растяжение-сжатие, что имеет место для резинокордной ленты. В случае если пластина изготовлена из изотропного материала будет наблюдаться неплотное прилегание к внутренней поверхности цилиндра, и возникнет зона отслоения. Такая задача относится к классу контактных задач с неизвестной заранее областью контакта [3]. В статье [4] В.Л. Бидерман и С.В. Бояршинов получили аналитическое решение контактной задачи о посадке упругого кольца на вал. При этом упругое кольцо контактирует с жесткой цилиндрической поверхностью, зона контакта заранее неизвестна. Ими были определены контактные усилия и найдено значение угла отслоения. Перемещения кольца при посадке на вал малы и поэтому задача, рассмотренная в [4] является геометрически линейной. В докладах [5, 6] был предложен и развит численный

алгоритм решения геометрически нелинейных контактных задач, сочетающий в себе применение метода малых нагружений с методом стрельбы. При этом было получено и численное решение рассматриваемой задачи. В настоящей статье с использованием подходов, принятых в работах [1] и [4], найдено приближенное аналитическое решение задачи об изгибе изотропной пластины, помещенной в цилиндрическую полость, с учетом наличия зоны отслоения.

Условия равновесия на отслоенном и прилегающем участках

Следуя [2], будем считать, что срединная поверхность изогнутой пластины мало отличается от поверхности кругового цилиндра радиуса R , поэтому целесообразно деформацию пластины рассматривать в системе координат, связанной с поверхностью цилиндра. Считаем, что пластина находится в условиях цилиндрического изгиба, так что можно ограничиться рассмотрением деформаций в одной плоскости. При этом в отличие от [2], предполагается наличие зоны отслоения, размер которой определяется некоторым углом α . Обычно [3, 4], распределение контактных усилий в подобных задачах принимается в соответствии с рис. 3: здесь q – распределенное по площади контактное давление постоянной интенсивности, Q_1 и Q_2 – усилия, распределенные вдоль границ зон контакта.

Рис. 3

Допустимость принятой силовой схемы должна быть подтверждена в ходе решения. При этом, как отмечалось в [7], принимаемое в подобных задачах распределение сил,

противоречит предположению о плотном прилегании пластины к поверхности цилиндра на участке ВС. Здесь пластина должна находиться в условиях чистого изгиба и при использовании теории пластин Кирхгофа-Клебша поперечная нагрузка q должна быть равна нулю, а нагрузка должна быть представлена изгибающими моментами, приложенными к наружному контуру пластины. При принятой схеме нагрузок, должны каким-то образом, проявиться противоречия при решении уравнений в перемещениях и удовлетворении граничным условиям. Как будет показано ниже, предположение о плотном прилегании на участке ВС выполняется с некоторой погрешностью. Здесь будут перемещения, но они оказываются существенно меньше, чем в зоне отслоения АВ.

Так как в направлении образующей цилиндра, в силу принятых допущений, пластина не изгибается, внутренние силовые факторы могут быть найдены из условий равновесия методом сечений. Силовые факторы действующие на отслоенном участке АВ показаны на рисунке 4.

Рис. 4

Записывая уравнения равновесия, получим:

$$\begin{aligned} N_x &= -Q_1 \sin \varphi \\ Q_x &= Q_1 \cos \varphi \\ M_x &= Q_1 R \sin \varphi \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь N_x - погонная продольная сила, Q_x - погонная поперечная сила, M_x - погонный изгибающий момент, φ - некоторый текущий угол. Принятые положительные направления силовых факторов, показаны на рис. 4.

Для прилегающего участка силовые факторы показаны на рис. 5:

Рис. 5

Уравнения равновесия для участка BC:

$$\begin{aligned} N_x &= -Q_1 \sin \varphi - Q_2 \sin(\varphi - \alpha) + qR[\cos(\varphi - \alpha) - 1] \\ Q_x &= Q_1 \cos \varphi + Q_2 \cos(\varphi - \alpha) + qR \sin(\varphi - \alpha) \\ M_x &= Q_1 R \sin \varphi + Q_2 R \sin(\varphi - \alpha) + qR^2 [1 - \cos(\varphi - \alpha)] \end{aligned} \quad (2)$$

α - угол, характеризующий размер зоны отслоения.

Определение контактных сил и давления

На участке BC пластина в силу плотного прилегания к цилиндру находится в условиях чистого изгиба и момент на этом участке постоянный, чтобы на участке BC выполнялось условие $M_x = M = const$, из третьего уравнения системы (2) получим

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{qR}{\sin \alpha} \\ Q_2 &= -qR \cdot \operatorname{ctg} \alpha \\ M &= qR^2 \end{aligned} \quad (3)$$

При чистом изгибе изгибающий момент связан с кривизной соотношением

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{D} = \frac{qR^2}{D} \quad (4)$$

Где $D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ цилиндрическая жесткость, E – модуль упругости материала, μ – коэффициент Пуассона. Из (4) следует

$$q = \frac{D}{R^3} \quad (5)$$

Таким образом, оказываются определенными значения всех контактных усилий.

Определение перемещений на отслоенном участке и размера зоны отслоения

Для определения неизвестного угла α потребуется рассмотрение деформаций отслоенного участка АВ пластины. Как и при записи уравнений равновесия, будем считать, что срединная поверхность изогнутой пластины мало отличается от поверхности кругового цилиндра радиуса R и используем геометрические и физические уравнения цилиндрической оболочки [8]. В случае изгиба в одном направлении продольное усилие N_x и изгибающий момент M_x связаны с компонентами перемещения u и w соотношениями:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\varphi} + w \right) \\ M_x &= \frac{D}{R} \left(1 - \frac{1}{R} \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{d\varphi} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Первое слагаемое $\frac{D}{R}$ в формуле для момента M_x учитывает момент, возникающий при сворачивании пластины в цилиндр. Положительные направления перемещений u и w показаны на рис. 3.

Используя уравнения равновесия для зоны отслоения (1) и найденные значения силовых факторов (3) перепишем (6) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{Eh}{1 - \nu^2} \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\varphi} + w \right) &= -Q_1 \sin \varphi = -\frac{D}{R^2 \sin \alpha} \sin \varphi \\ \frac{D}{R} \left(1 - \frac{1}{R} \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{d\varphi} \right) &= Q_1 R \cdot \sin \varphi = \frac{D}{R \sin \alpha} \sin \varphi \end{aligned} \quad (7)$$

После преобразований приходим к системе из двух дифференциальных уравнений для определения неизвестных перемещений u и w в зоне отслоения:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} + w &= -a_u \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \\ \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \frac{du}{d\varphi} &= R \cdot \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

где $a_u = \frac{h^2}{12R}$. Из системы (8) получим дифференциальное уравнение для определения w :

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = R \cdot \left(1 - \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}\right) - a_u \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \quad (9)$$

Общее решение уравнения (9):

$$w = C_1 \cdot \sin \varphi + C_2 \cdot \cos \varphi + R + \frac{R + a_u}{2 \sin \alpha} \varphi \cdot \cos \varphi \quad (10)$$

Неизвестные константы C_1 и C_2 , а так же угол отсложения α определяются из граничных условий. Потребуем выполнения на концах участка АВ равенства нулю поперечных перемещений, а в зоне сопряжения с прилегающим участком ВС равенства нулю угла поворота:

$$\begin{aligned} w(0) &= w(\alpha) = 0 \\ \frac{dw}{d\varphi}(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим значения констант:

$$\begin{aligned} C_1 &= -R \sin \alpha + \frac{R + a_u}{2 \sin \alpha} \cos^2 \alpha \\ C_2 &= -R \end{aligned} \quad (12)$$

и трансцендентное уравнение для определения угла α :

$$\frac{1 - \frac{a_u}{R}}{2} \cos \alpha + \frac{1 + \frac{a_u}{R}}{2} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1 \quad (13)$$

Ввиду малости толщины пластины h , коэффициент $a_u \ll R$, поэтому (13) можно приближенно переписать в виде:

$$\cos \alpha + \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1 \quad (14)$$

Уравнение (14) совпадает с полученным в [4] аналогичным уравнением в контактной задаче о посадке упругого кольца на вал. Значение угла α , удовлетворяющее (14) будет таким же, как и в (4): $\alpha = 122^0 35'$. При малых значениях a_u решения (13) и (14) отличаются незначительно, так при $R = 1000$ мм и $h = 1$ мм, значения угла $\alpha = 122^0 34'$. Значения внутренних силовых факторов могут быть найдены по уравнению (6), а поперечного перемещения w по уравнению (10) с учетом значений констант (12). При вычислениях можно пренебречь a_u по сравнению с радиусом цилиндрической полости R . Максимальное значение поперечного смещения в относительных единицах составляет приблизительно:

$$\bar{w}_{\max} = \frac{w_{\max}}{R} \approx 0,1, \text{ максимальное значение изгибающего момента } \bar{M}_{x \max} = M_{x \max} \frac{R}{D} \approx 1,2.$$

Хотя значения перемещений велики, они, так же как и размер зоны отслоения получаются близкими к найденным в работе [5], где применялся численный метод для нелинейных задач. Поэтому данное решение может быть использовано в качестве первого приближения.

Перемещения на прилегающем участке

Оценим так же величину продольного смещения u на свободных кромках свернутой в цилиндр пластины. Используя первое уравнение из системы (8) и решение (10) уравнения (9) запишем:

$$\frac{du}{d\varphi} = -w - a_u \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} = -C_1 \cdot \sin \varphi - C_2 \cdot \cos \varphi - R - \frac{R + a_u}{2 \sin \alpha} \varphi \cdot \cos \varphi - a_u \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \quad (15)$$

Где константы C_1 и C_2 определяются формулами (12). При интегрировании уравнения (15) появляется еще одна константа C_3 , которая должна быть определена из граничных условий на отслоенном участке. Учитывая, что наше решение является приближенным, пренебрежем продольным перемещением на прилегающем участке ВС и примем в качестве граничного условия $u(\alpha) = 0$. После интегрирования и удовлетворения граничному условию получим $u(\varphi)$:

$$u = \left(C_1 + \frac{a_u}{\sin \alpha} \right) \cdot (\cos \varphi - \cos \alpha) - C_2 \cdot (\sin \varphi - \sin \alpha) - R \cdot (\varphi - \alpha) - \frac{R + a_u}{2 \sin \alpha} (\varphi \cdot \sin \varphi - \alpha \cdot \sin \alpha) - \frac{R + a_u}{2 \sin \alpha} (\cos \varphi - \cos \alpha) \quad (16)$$

Подставим в (16) значения констант C_1 , C_2 и упростим конечное выражение при $a_u \ll R$, полагая $a_e \approx 0$:

$$u = -R \cdot \left(\frac{\sin^2 \alpha + 2}{2 \cdot \sin \alpha} \cdot (\cos \varphi - \cos \alpha) - (\sin \varphi - \sin \alpha) + (\varphi - \alpha) + \frac{1}{2 \sin \alpha} (\varphi \cdot \sin \varphi - \alpha \cdot \sin \alpha) \right) \quad (17)$$

На свободной кромке пластины для значения угла отслоения $\alpha = 122^\circ 35'$ получаем

$$\bar{u}(0) = \frac{u(0)}{R} \approx 0,1 \quad (18)$$

При таких перемещениях свободные кромки пластины будут напозать друг на друга (что фактически имеет место при сворачивании конвейерной ленты), если рассмотреть не пластину, а тонкую проволоку, сворачиваемую в кольцо, то будет наблюдаться перехлест концов проволоки. Условия, при которых реализуется решение данной задачи, можно выполнить, если взять ширину пластины $b < 2 \cdot \pi \cdot R$, учитывая (18), $b \approx 1,8 \cdot \pi \cdot R$.

Оценим теперь величины перемещений на прилегающем участке ВС. Здесь продольная сила и изгибающий момент (2) после подстановки контактных сил (3) будут:

$$\begin{aligned} N_x &= -qR \\ M_x &= qR^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя в уравнения (6), связывающие усилия и перемещения при изгибе цилиндрической оболочки в одном направлении получим систему из двух дифференциальных уравнений для перемещений в зоне прилегания, аналогичную системе (8) для зоны отслоения:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} + w &= -a_u \\ \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \frac{du}{d\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Система содержит очевидное противоречие с исходным предположением, принятыми при решении задачи. В силу прилегания пластины к поверхности цилиндра на участке ВС должно быть $w = 0$ и, как отмечалось выше, в рамках классической теории изгиба при чистом изгибе $q = 0$. Ясно, что для правомерности приведенного выше решения, перемещения, полученные из (20) должны быть малыми. Решая систему уравнений в той же последовательности, что и (8), при граничных условиях

$$w(\pi) = 0, \quad \frac{dw}{d\varphi}(\pi) = 0, \quad u(\pi) = 0 \quad (21)$$

получим значения перемещений в зоне прилегания

$$\begin{aligned} u &= a_u \cdot \sin \varphi \\ w &= -a_u \cdot (1 + \cos \varphi) \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, в зоне прилегания перемещения оказываются малыми порядка $0,1h$, в то время как, на отслоенном участке большими – порядка $0,1R$. Видно, что предположение о плотном прилегании на участке ВС выполняется приближенно.

Выводы

1. В статье получено решение контактной задачи о пластине, свернутой в цилиндр и помещенной в цилиндрическую полость, причем в отличие от известных решений [1,2] размер зоны прилегания заранее неизвестен и определяется в ходе решения.

2. Известно [7], что обычно принимаемое в подобных задачах распределение сил [3], противоречит (при использовании классической теории изгиба) предположению о чистом изгибе части пластины, плотно прилегающей к поверхности цилиндра. В данной статье

показано, что это противоречие дает перемещения в зоне прилегания порядка 0,1 от толщины пластины.

3. Распространение полученного решения, учитывающего наличие зоны отслоения, на ортотропные пластины [1,2] не представляет сложности и требует только коррекции параметров в уравнениях (6), связывающих перемещения с внутренними силовыми факторами.

Список литературы

1. Черненко В.Д. Изгиб ортотропной цилиндрической пластины в цилиндрическую оболочку // Прикладная механика. 1972. Т. 15, № 4. С. 49-53.
2. Черненко В.Д. Расчет средств непрерывного транспорта. СПб.: Политехника, 2008. 386 с.
3. Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Е.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1978. 248 с.
4. Бидерман В.Л., Бояршинов С.В. Расчет храпового механизма пружинного типа // Труды кафедры сопротивления материалов МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1947. С. 127-142.
5. Дмитриев С.Н., Солодовникова С.Ю. Нелинейная контактная задача об изгибе тонкой пластины, помещенной в цилиндрическую полость // Ракетно-космическая техника: фундаментальные и прикладные проблемы : труды 2-й Междунар. науч. конф. (Москва, 18-21 ноября 2003 г.) : в 4 ч. 2005. Ч. 2. С. 56.
6. Дмитриев С.Н., Солодовникова С.Ю. Контактная задача о равновесии пластины, свернутой в цилиндр // Аэрокосмические технологии, 2004-2007 : сб. тр. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. С. 348-351.
7. Феодосьев В.И. Избранные вопросы и задачи по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.
8. Погорелов В.И. Строительная механика тонкостенных конструкций. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 528 с.

Analytical solution of the Hertzian contact problem of elastic deformations of a thin plate positioned in a cylindrical cavity

01, January 2013

DOI: 10.7463/0113.0517977

Dmitriev S.N.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

dim.sm2@yandex.ru

The author proposes an analytical solution of the contact problem of elastic deformations of a thin plate rolled up into a cylinder and placed into a cylindrical cage of the same radius. In this case, the plate is only partially adjacent to the surface of the cylinder, on the other part there is delamination. For linearization of basic correlations it is assumed that the plate deviates from the surface of the cylindrical cavity to a very little degree; therefore, it is possible to use the equilibrium equation, as well as physical and geometric equations of cylindrical shell. It is considered that the shell bending is cylindrical. The rolling of the plate is taken into account as a pre-stressed state. It is supposed that it is a state of pure bending in plane. As a result of solution, the angle of delamination, displacement and internal power factors are determined.

Publications with keywords: [bending](#), [slice](#), [shell](#), [deformations](#)

Publications with words: [bending](#), [slice](#), [shell](#), [deformations](#)

References

1. Chernenko V.D. Izgib ortotropnoi tsilindricheskoi plastiny v tsilindricheskuu obolochku [Bending of orthotropic cylindrical plate into the cylindrical shell]. *Prikladnaia mekhanika* [Applied mechanics], 1972, vol. 15, no. 4, pp. 49-53.
2. Chernenko V.D. *Raschet sredstv nepreryvnogo transporta* [Calculation of means of continuous transport]. St. Petersburg, Politehnika, 2008. 386 p.
3. Mossakovskii V.I., Gudramovich V.S., Makeev E.M. *Kontaknye zadachi teorii plastin i obolochek* [Contact problems of the theory of plates and shells]. Moscow, Mashinostroenie, 1978. 248 p.
4. Biderman V.L., Boiarshinov S.V. *Raschet khrapovogo mekhanizma pruzhinno tipa* [Calculation of the ratchet mechanism of spring type]. *Trudy kafedry soprotivleniia materialov MVTU im. N.E. Baumana* [Works of the Department of Strength of Materials of the Bauman MHTU], 1947, pp. 127-142.
5. Dmitriev S.N., Solodovnikova S.Iu. Nelineinaia kontaktnaia zadacha ob izgibe tonkoi plastiny, pomeshchennoi v tsilindricheskuu polost' [Nonlinear contact problem of the bending of

a thin plate, placed in a cylindrical cavity]. *Raketno-kosmicheskaya tekhnika: fundamental'nye i prikladnye problemy : trudy 2-i Mezhdunar. nauch. konf.* [Rocket-space technology: fundamental and applied problems : proc. of the 2th International scientific conference], Moscow, 18-21 November 2003, 2005, pt. 2, pp. 56.

6. Dmitriev S.N., Solodovnikova S.Iu. Kontaktnaya zadacha o ravновесии пластины, свернутой в цилиндр [Contact problem of the equilibrium of the plate, rolled into a cylinder]. *Aerokosmicheskie tekhnologii, 2004-2007 : sb. tr.* [Aerospace technologies, 2004-2007 : the collection of works]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2008, pp. 348-351.

7. Feodos'ev V.I. *Izbrannye voprosy i zadachi po soprotivleniiu materialov* [Selected questions and tasks in Strength of Materials]. Moscow, Nauka, 1967. 376 p.

8. Pogorelov V.I. *Stroitel'naya mekhanika tonkostennykh konstruktsii* [Structural mechanics of thin-walled structures]. St. Petersburg, BKhV-Peterburg, 2007. 528 p.