Механические колебательные системы с поступательными движениями. Возможные формы сочленения звеньев

12, декабрь 2012

DOI: 10.7463/1212.0486791

Елисеев С. В., Ермошенко Ю. В., Ситов И. С.

УДК 62.752

Россия, НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования,
Иркутский государственный университет путей сообщения.

eliseev_s@inbox.ru
ermosh_ emf@irgups.ru
sitov@yandex.ru

Введение. В задачах виброзащиты и виброизоляции оборудования и машин, особенно на предварительной стадии оценки динамических свойств, возникает необходимость упрощения исходной расчетной схемы [1, 2]. В последние годы появился ряд работ, посвященных вопросам упрощения механических систем на основе правил преобразования структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления на основе понятий об обобщенных пружинах (или квазипружинах), например, [3], [4]. Определенными возможностями в этом направлении обладают и методы формирования сочленений [5, 6]. Возможности использования сочленений, твердых тел в механических колебательных системах, если сочленение имеет вид вращательных шарниров, приведены в работах [7, 8]. Вместе с тем, определенный интерес представляют собой системы с элементами, совершающими поступательные вертикальные движения. Исследования показывают, что в таких системах также могут быть реализованы сочленения; чаще всего в таких ситуациях взаимодействующие между собой элементы при очень жесткой упругой связи объединяются в один блок. Такой подход не только упрощает исходную систему, но и уменьшает число степеней свободы движений, оставляя при этом возможности оценки легитимности упрощений.

I. Постановка задачи. Общие положения. В предлагаемой статье рассматриваются возможности выбора схем упрощения механической системы с тремя степенями свободы (рис 1). Выражения для кинетической и потенциальной энергии движения можно представить в виде:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{y}_3^2, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(y_3 - y_2)^2 + \frac{1}{2}k_4(y_3 - z_2)^2 + \\ & + \frac{1}{2}k_5(y_3 - y_1)^2 + \frac{1}{2}(y_2 - z_2)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ – соответствующие коэффициенты жесткости пружин, соединяющих массы $m_1 \div m_3$, каждая из которых может представлять собой объект защиты. В рассматриваемой системе (рис.1) имеются кинематические возмущения z_1 и z_2 . При заданной схеме расположения упругих элементов система не может быть отнесена к непланарным системам [9]. Используя обычные приемы [1], получим систему дифференциальных уравнений движения в системе координат y_1, y_2, y_3 . В этом случае уравнения движения системы (рис.1) примут вид

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2 + k_3) - k_2y_2 - k_3y_3 &= k_1z_1, \\ m_2\ddot{y}_2 + y_2(k_2 + k_3 + k_6) - k_2y_1 - k_3y_3 &= k_6z_2, \\ m_3\ddot{y}_3 + y_3(k_3 + k_4 + k_5) - k_3y_2 - k_3y_1 &= k_4z_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Рис. 1. Расчетная схема виброзащитной системы с тремя степенями свободы

Обозначим правые части уравнений (3) соответственно

$$b_1 = k_1z_1, \quad b_2 = k_6z_2, \quad b_3 = k_4z_2. \quad (4)$$

II. Выбор координат относительного движения. Полагая, что свойства сочленения масс m_1 и m_2 будут связаны с другой системой координат, введем соотношение

$$y_0 = y_2 - y_1 \quad (5)$$

и перейдем к системе y_0, y_1, y_3 . В этом случае выражения (1) и (2) преобразуются к виду

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y}_0 + \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{y}_3^2, \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_0 + y_1 - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(y_3 - y_0 - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_4(y_3 - z_2)^2 + \\
& \frac{1}{2}k_5(y_3 - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_6(y_0 + y_1 - z_2)^2.
\end{aligned}
\tag{7}$$

Используя (4) и (5), можно преобразовать систему уравнений движения к координатам y_0, y_1, y_3 , что позволяет получить

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_3 + k_5 + k_6) + m_2\ddot{y}_0 + (k_3 + k_6)y_0 + y_3(-k_3 - k_5) &= k_1z_1 + k_6z_2; \\
m_2\ddot{y}_2 + y_1(k_3 + k_6) + m_2y_0 + y_0(k_2 + k_3 + k_6) + y_3(-k_3) &= k_6z_2; \\
m_3\ddot{y}_3 + y_3(k_3 + k_4 + k_5) + y_1(-k_3 - k_5) + y_0(-k_3) &= k_4z_2.
\end{aligned}
\tag{8}$$

В табл.1 приведены коэффициенты уравнений (8) в унифицированной форме.

Табл. 1.

Значения коэффициентов системы уравнений (8) в координатах y_0, y_1, y_3

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$(m_1 + m_2)p^2 + k_1 + k_3 + k_5 + k_6$	$m_2p^2 + k_3 + k_6$	$-k_3 - k_5$
a_{21}	a_{22}	a_{23}
$m_2p^2 + k_3 + k_6$	$m_2p^2 + k_2 + k_3 + k_6$	$-k_3$
a_{31}	a_{32}	a_{33}
$-k_3 - k_5$	$-k_3$	$m_3p^2 + k_3 + k_4 + k_5$

Для системы координат y_0, y_1, y_3 обобщенные силы имеют вид

$$b_1 = k_1z_1 + k_6z_2, b_2 = k_6z_2, b_3 = k_4z_2. \tag{9}$$

При переходе от одной системы координат к другой обобщенные силы обычно определяются через соответствующее равенство работ на виртуальных перемещениях в двух сопоставимых системах координат. В данном случае, когда возмущение носит кинематический характер, обобщенные силы получаются одновременно в процессе вывода уравнений.

При сопоставлении математических моделей, отражаемых уравнениями (3) и (8), можно отметить, что диагональный член a_{11} содержит сумму масс $m_1 + m_2$. Изменились и перекрестные связи a_{12} и a_{21} (табл. 1), которые в отличие от уравнений (3) приобретают не упругий, а инерционно-упругий характер. В частности при частоте внешнего воздействия

$$\omega_1^2 = \frac{k_3 + k_6}{m_2} \tag{10}$$

возможна развязка движений между парциальными системами a_{11} и a_{22} (табл. 1).

III. Особенности различных систем координат. Для введения системы координат вида y_1, y_2, y_{00} принимается, что

$$y_{00} = y_3 - y_2. \quad (11)$$

В этих координатах выражения для кинетической и потенциальной энергий системы (1) и (2), можно записать в виде

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{y}_{00} + \dot{y}_2)^2, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_{00})^2 + \frac{1}{2} k_4 (y_{00} + y_2 - z_2)^2 + \\ & + \frac{1}{2} k_5 (y_{00} + y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_6 (y_2 - z_2)^2, \end{aligned} \quad (13)$$

откуда могут быть получены уравнения движения системы (рис.1) в системе координат y_1, y_2, y_{00} . Соответствующие значения коэффициентов унифицированной системы уравнений приведены в табл.2.

Табл. 2.

Значения коэффициентов системы уравнений в координатах y_1, y_2, y_{00}

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$m_1 p^2 + k_1 + k_2 + k_5$	$-k_2 + k_5$	$-k_5$
a_{21}	a_{22}	a_{23}
$-k_2 + k_5$	$(m_2 + m_3) p^2 + k_2 + k_4 + k_5 + k_6$	$k_4 + k_5 + m_3 p^2$
a_{31}	a_{32}	a_{33}
$-k_5$	$m_3 p^2 + k_4 + k_5$	$m_3 p^2 + k_3 + k_4 + k_5$

Обобщенные силы системы с координатами y_1, y_2, y_{00} имеют вид

$$b_1 = k_1 z_1, \quad b_2 = k_6 z_2 + k_4 z_2, \quad b_3 = k_4 z_2. \quad (14)$$

По сравнению с традиционной системой координат y_1, y_2, y_3 из таблицы 2 можно установить, что парциальная система в матрице a_{22} имеет сумму масс $m_2 + m_3$. В свою очередь изменяются и формы связей a_{22} и a_{32} , приобретая инерционно-упругий характер.

При частоте $\omega_2^2 = \frac{k_4 + k_5}{m_3}$ в данной системе происходит развязка движений между

парциальными системами a_{22} и a_{23} .

Для рассмотрения случая сочленения трех тел введем в рассмотрение систему обобщенных координат y_1, y_2, y_{000} ,

$$\text{где } y_{000} = y_3 - y_1. \quad (15)$$

В этом случае выражения для кинетической и потенциальной энергий (1) и (2) преобразуется к виду

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{y}_1 + \dot{y}_{000})^2, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(y_1 + y_{000} - y_2)^2 + \\ & + \frac{1}{2}k_4(y_1 + y_{000} - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_5(y_{000})^2 + \frac{1}{2}k_6(y_2 - z_2)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

В табл. 3 приведены значения коэффициентов унифицированной системы уравнений, которые могут быть получены способом, аналогичными выше приведенным.

Табл. 3

Значения коэффициентов уравнений движения в координатах y_1, y_2, y_{000}

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$(m_1 + m_3)p^2 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4$	$-k_2 - k_3$	$m_3p^2 + k_3 + k_4$
a_{21}	a_{22}	a_{23}
$-k_2 - k_3$	$m_2p^2 + k_2 + k_3 + k_6$	k_3
a_{31}	a_{32}	a_{33}
$m_3p^2 + k_3 + k_4$	$-k_3$	$m_3p^2 + k_3 + k_4 + k_5$

Обобщенные силы для системы с координатами y_1, y_2, y_{000} имеют вид

$$b_1 = k_1z_1 + k_4z_2, b_2 = k_6z_2, b_3 = k_4z_2. \quad (18)$$

Введение относительных координат y_1, y_2, y_{000} позволяет получить соответствующие частные виды расчетных схем по отношению к исходной системе, приведенной на рис.1.

На рис. 2 (а, б, в) приведены соответствующие расчетные схемы. При этом при «обнулении» y_0, y_{00}, y_{000} соответствующим образом «обнуляются» столбцы и строки матрицы коэффициентов, что упрощает построение.

Рис. 2. Расчетные схемы для

ВЗС с сочленениями:

а) $y_2 - y_1 = 0$ ($y_0 = 0$);

б) $y_2 - y_3 = 0$ ($y_{00} = 0$);

в) $y_1 - y_3 = 0$ ($y_{000} = 0$)

IV. Структурные интерпретации систем. Сложные режимы. Структурные схемы

эквивалентных в динамическом отношении САУ приведены на рис. 3 (а, б, в, г). Исходные данные для построения соответствующих структурных схем могут быть взяты из табл. 1÷3. Структурная схема на рис. 3а отражает свойства исходной механической системы (рис. 1); в этой системе динамическое состояние описывается тремя координатами y_1, y_2, y_3 . Если предполагается возможность сочленения m_1 и m_2 , то структурная схема имеет вид, как показано на рис. 3б: в свою очередь, при сочленении m_2 и m_3 - имеем структурную схему на рис. 3в; при сочленении m_1 и m_3 - имеем соответственно структурную схему на рис. 3г. Отметим, что сочленения изменяют структуру системы; при этом каждое сочленение устраняет одну степень свободы. Оставшиеся динамические связи определяются матрицей коэффициентов после исключения соответствующих строки и столбца в таблицах 1÷3. Рассматривая «обнуление» движения ($y_i = 0 (i = \overline{1,3})$) как сочленение, можно упростить расчетные схемы, представленные на рис. 3(а, б, в, г), до системы с одной степенью свободы.

При развитии предлагаемого способа упрощения (или синтеза) систем, представляет интерес рассмотрение движения в системе координат y_1, y_0, y_{00} ($y_0 = y_2 - y_1, y_{00} = y_2 - y_3$). В этом случае выражения для кинетической и потенциальной энергий (1) и (2) преобразуются к виду

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y}_0 + \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{y}_{00} + \dot{y}_0 + \dot{y}_1)^2, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_3 - y_2)^2 + \frac{1}{2} k_4 (y_3 - z_2)^2 + \\ & \frac{1}{2} k_5 (y_3 - y_1)^2 + \frac{1}{2} (y_2 - z_2)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Делая ряд преобразований, аналогичных выше приведенным, получим систему дифференциальных уравнений движения

$$\left. \begin{aligned}
& (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_4 + k_6) + (m_2 + m_3) \ddot{y}_0 + (-k_4)y_0 + \\
& + \ddot{y}_{00}m_3 + y_{00}(k_6 + k_4) = k_1 z_1 + k_4 z_2 + k_6 z_2; \\
& (m_2 + m_3) \ddot{y}_0 + y_0(k_2 + k_5) + m_3 \ddot{y}_{00} + y_{00}(k_4 + k_5) + \\
& + \ddot{y}_1(m_2 + m_3) + y_1(-k_4) = k_4 z_2; \\
& m_3 \ddot{y}_{00} + y_{00}(k_3 + k_4 + k_5 + k_6) + \ddot{y}_0(m_3) + y_0(k_4 + k_5) + \\
& + m_3 \ddot{y}_1 + (k_4 + k_6)y_1 = k_4 z_2 + k_6 z_2;
\end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Рис. 3. Структурные схема ВЗС для различных случаев сочленения при системе координат:

- а) y_1, y_2, y_3 (сочленений нет); б) y_1, y_1, y_3 ($y_0 = y_2 - y_1 = 0$);
 в) y_1, y_2, y_{00} ($y_{00} = y_2 - y_3 = 0$); г) y_1, y_2, y_{000} ($y_{000} = y_1 - y_3 = 0$)

Значения коэффициентов уравнений (21), приведенного к унифицированной форме представлены в табл.4.

Табл.4.

Значения коэффициентов уравнений движения в координатах y_1, y_0, y_{00}

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$(m_1 + m_2 + m_3)p^2 + k_1 + k_4 + k_6$	$-(m_2 + m_3)p^2 - k_4$	$m_3p^2 + k_6 + k_4$
a_{21}	a_{22}	a_{23}
$(m_2 + m_3)p^2 - k_4$	$(m_2 + m_3)p^2 + k_2 + k_5$	$m_3p^2 + k_4 + k_5 + k_6$
a_{31}	a_{32}	a_{33}
$m_3p^2 - k_4 + k_6$	$m_3p^2 + k_4 + k_5 + k_6$	$m_3p^2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6$

Обобщенные силы системы с координатами y_1, y_0, y_{00} имеют вид

$$b_1 = k_1 z_1 + k_4 z_2 + k_6 z_2, \quad b_2 = k_4 z_2, \quad b_3 = k_4 z_2 + k_6 z_2. \quad (22)$$

Если полагать, что $y_0 = 0$ и $y_{00} = 0$, то есть $y_1 = y_2 = y_3$, то система примет вид, как показано на рис.4 а, б.

Рис. 4. Расчетная схема исходной системы (рис. 1) для случая сочленения трех тел (а), структурная схема, соответствующая схеме с тремя сочленениями (б)

При двух сочленениях исходная система превращается в систему с одной степенью свободы, частота собственных колебаний которой определяется выражением

$$\omega_{coa}^2 = \frac{k_1 + k_4 + k_6}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (23)$$

Для оценки возможностей использования сочленений, как способа изменения структуры и ее последующего упрощения, рассмотрим структурную схему эквивалентной в динамическом отношении САУ (рис. 5) в системе координат y_1, y_0, y_{00} , что соответствует математической модели в виде системы уравнений (21). Для сравнения на рис.6 (а, б, в) приведены структурные схемы эквивалентных САУ для виброзащитных систем в координатах y_1, y_0, y_3 (рис. 6а), координатах y_1, y_2, y_{00} (рис. 6б), координатах y_1, y_2, y_{000} (рис. 6в).

Рис. 5. Структурная схема эквивалентной САУ в системе координат y_1, y_0, y_{00}

Рис. 6. Структурные схемы для ВЗС (рис.3.4) в системах координат:

а) y_1, y_0, y_3 ($y_0 \neq 0$); б) y_1, y_2, y_{00} ($y_{00} \neq 0$); в) y_1, y_2, y_{000} ($y_{000} \neq 0$)

Отметим, что выбор системы обобщенных координат изменяет не только вид парциальных систем, но изменяет и перекрестные связи. В системе координат y_1, y_0, y_3 (рис. 6а) между движениями по y_1, y_0 возникает инерционно-упругая связь, что предполагает возможность возникновения режимов динамического гашения: это зависит от того, каковой, в конечном итоге, будет выбранная система внешних кинематических воздействий z_1, z_0 . Между координатами y_0, y_3 существует упругая связь, определена упругим звеном k_3 . В системе координат y_1, y_2, y_{00} (рис. 6б) при тех же внешних кинематических воздействиях между координатами y_1, y_0 существует упругая связь, а между y_2, y_{00} - инерционно-упругая связь, которая при определенной частоте «обнуляется», что исключает прямую связь движений между парциальными системами. Между координатами y_1, y_{00}, y_{000} (рис. 6в) возникает система упругих перекрестных связей, что исключает появление режимов развязки колебаний между парциальными системами.

Заключение. Приведенное выше представляет собой, по-существу доказательство возможности формирования сочленения, путем соответствующего выбора системы координат. Последующие процедуры проводятся в формализованном порядке и обеспечивают получение соответствующей модели. Доказательная основа подхода, связана с переходом системы с большим числом степеней свободы к системе с меньшим числом степеней, что не затрагивает условия разрешимости уравнений. Получение математических моделей систем с сочленениями может быть получено, и физически это объяснимо, если параметры элементов, соединяющих определенные точки системы (упругие элементы и любые другие из расширенного набора типовых ВЗС) будут принимать предельные значения (или очень большие по сравнению с другими).

Список литературы

1. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2008. – 523 с.
2. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Сочленения звеньев в виброзащитных системах как процесс уменьшения числа степеней свободы движения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование.– Иркутск: ИрГУПС, 2010.– Вып. 4 (28). – С. 8-15.
3. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В., Упырь Р.Ю. Обобщенная пружина в задачах динамики машин и оборудования // Збірник наукових праць (галузе

машинобудування, будівництво).– Полтава: ПолтНТУ ім. Ю. Кондратюка, 2009. – Т.1, вып. 3 (25). – С. 79–89.

4. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Упырь Р.Ю., Гозбенко В.Е., Фомина И.В. Мехатроника виброзащитных систем. Элементы теории / ИрГУПС.– Иркутск, 2009. – 128 с. – Деп. в ВИНТИ 27.11.09, №738-В 2009.

5. Насников Д.Н., Фомина И.В., Сигаев Н.П. Развитие подходов к упрощению расчетных схем механических колебательных систем // Информационные и математические технологии в науке и управлении: труды XVI Байкальской Всероссийской конференции с международным участием. Т. 2.– Иркутск, 2010.– С. 23–31.

6. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Транспортные подвески. Математические модели. Выбор систем координат // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование.– Иркутск: ИрГУПС, 2011.– Вып. 2 (30).– С. 8–18.

7. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Расширение теоремы о наложении связей для систем с сочленениями // Вестник Белорусского гос. университета. Наука и транспорт.– 2011. – № 1. –С. 89-93.

8. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Виброзащитные системы с сочленениями звеньев. Метод построения математических моделей // Повышение динамического качества подвижного состава и поезда : межвуз. сб. науч. трудов.– Омск: Омский гос. ун-т путей сообщения, 2011. – С. 6–26.

9. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Непланарность в структурных аналогах механических систем с межкоординатными связями // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование.– Иркутск: ИрГУПС, 2011. – Вып. 4 (32). – С. 8–17.

Mechanical oscillatory systems with progressive motion. Possible forms of link connections.

12, December 2012

DOI: 10.7463/1212.0486791

Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V., Sitov I.S.

Russia. Science educational center of modern technologies, system analysis and modelling,
Irkutsk State Transport University

eliseev_s@inbox.ru
ermosh_emf@irgups.ru
sitov@yandex.ru

The authors propose a technology for creating mathematical models of mechanical oscillatory systems with a chain structure and several degrees of freedom. Various descriptions of movement in different coordinates are considered. Some coordinates characterize relative motion. Nulling of such coordinates results in combining corresponding mass-inertia elements; hence, the system on the whole reduces the number of degrees of freedom by one. Generalization allowing to set several coordinates equal to zero simultaneously is also considered. Some examples are provided.

Publications with keywords: [coupling of rigid bodies](#), [mathematical models of oscillation systems with coupling](#), [approximation of mathematical models](#)

Publications with words: [coupling of rigid bodies](#), [mathematical models of oscillation systems with coupling](#), [approximation of mathematical models](#)

References

1. Eliseev S.V., Reznik Iu.N., Khomenko A.P., Zasiadko A.A. *Dinamicheskii sintez v obobshchennykh zadachakh vibrozashchity i vibroizoliatsii tekhnicheskikh ob"ektov* [Dynamic synthesis in the generalized problems of vibroprotection and vibroinsulation of technical objects]. Irkutsk, ISU Publ., 2008. 523 p.
2. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Sochleneniia zven'ev v vibrozashchitnykh sistemakh kak protsess umen'sheniia chisla stepenei svobody dvizheniia [Joints of sections in vibroprotection systems as the process of reducing the number of degrees of freedom of movement]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern technology. Systems analysis. Simulation]. Irkutsk, IrGUPS Publ., 2010, no. 4 (28), pp. 8-15.
3. Eliseev S.V., Belokobyl'skii S.V., Upyr' R.Iu. Obobshchennaia pruzhina v zadachakh dinamiki mashin i oborudovaniia [Generalized spring in problems of dynamics of machines and

equipment]. *Zbirnik naukovikh prats' (galuzeve mashinobuduvannia, budivnitstvo* [Collection of scientific works (sectoral engineering, construction)]. Poltava, Kondratiuk PoltNTU Publ., 2009, vol. 1, no. 3 (25), pp. 79-89.

4. Eliseev S.V., Reznik Iu.N., Upyr' R.Iu., Gozbenko V.E., Fomina I.V. *Mekhatronika vibrozashchitnykh sistem. Elementy teorii* [Mechatronics of systems of vibroprotection. Elements of the theory]. Irkutsk, IrGUPS, 2009. 128 p. Dep. VINITI no. 738-V 2009.

5. Nasnikov D.N., Fomina I.V., Sigachev N.P. Razvitie podkhodov k uproshcheniiu raschetnykh skhem mekhanicheskikh kolebatel'nykh sistem [Development of approaches to simplify of settlement schemes of mechanical oscillating systems]. *Informatsionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii: trudy 16 Baikal'skoi Vserossiiskoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Information and mathematical technologies in science and management: proceedings of the 16th Baikal all-Russian conference with international participation]. Vol. 2. Irkutsk, 2010, pp. 23-31.

6. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Transportnye podveski. Matematicheskie modeli. Vybory sistem koordinat [Transport suspension. Mathematical models. The choice of coordinate systems]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern technology. Systems analysis. Simulation]. Irkutsk, IrGUPS Publ., 2011, no. 2 (30), pp. 8–18.

7. Eliseev S.V., Ermoshenko Iu.V. Rasshirenie teoremy o nalozhenii svyazei dlia sistem s sochleneniiami [The expansion of the theorem on the imposition of relations for systems with joints]. *Vestnik Belorusskogo gos. universiteta. Nauka i transport* [Herald of the Belarusian State University. Science and transport], 2011, no. 1, pp. 89-93.

8. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Vibrozashchitnye sistemy s sochleneniiami zven'ev. Metod postroeniia matematicheskikh modelei [Vibroprotective systems with joints of sections. Method of building of mathematical models]. *Povyshenie dinamicheskogo kachestva podvizhnogo sostava i poezda : mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov* [Increase of dynamic quality of rolling stock and train: interuniversity collection of scientific works]. Omsk, OSTU Publ., 2011, pp. 6-26.

9. Eliseev S.V., Khomenko A.P. Neplanarnost' v strukturnykh analogakh mekhanicheskikh sistem s mezhkoordinatnymi svyaziami [Nonplanarity in structural analogues of mechanical systems with intercoordinate relations]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern technology. Systems analysis. Simulation]. Irkutsk, IrGUPS Publ., 2011, no. 4 (32), pp. 8–17.