Динамический компенсатор в форме наблюдателя

12, декабрь 2012

DOI: 10.7463/1212.0500592

Юрченков А. В.

УДК 004.3+519.6

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
alexander.yurchenkov@gmail.com

Введение

Наблюдатели с самой различной структурой широко применяются в различных областях теории управления. При синтезе управления в виде статической обратной связи по состоянию в качестве входа необходим весь вектор состояния системы, который, в свою очередь, не всегда может быть полностью измеримым. Для устранения этой проблемы можно построить наблюдатель и использовать оценку неизвестных компонентов пространства состояний вместо самих этих компонентов. В такой трактовке необходимо проверять справедливость принципа разделения, чтобы система, замкнутая управлением, построенным на оценках, не теряла устойчивости.

Если получен регулятор в виде произвольного динамического компенсатора, то на его основе можно построить компенсатор в форме наблюдателя, который может быть интересен с той точки зрения, что весь вектор пространства состояний у него является известным. И поэтому можно полностью оценивать динамику системы, даже при недостаточной информации о ней. Данное свойство не характерно для компенсаторов, не имеющих структуру наблюдателя.

Идея преобразования произвольного динамического компенсатора для непрерывной стационарной системы приведена в работе [1, 2]. В то время как для дискретных систем были сформулированы указания к действию. Целью

данной работы является распространение идеи, предложенной в [1] на случай дискретных систем. Эти результаты могут использоваться применительно к анизотропным субоптимальным регуляторам в форме произвольного динамического компенсатора.

Получение оценки пространства состояний динамического объекта полезно с точки зрения прикладных задач. Так, для устойчивой работы механической, электрической или любой другой системы, необходим постоянный мониторинг ее параметров, для того, чтобы они не превышали допустимых значений. Также в процессе стабилизации объекта по выходу можно наблюдать только часть переменных объекта управления, в то время как остальные компоненты пространства состояний могут принимать произвольные значения. Чтобы отследить момент, когда работа объекта может привести к его разрушению, и нужен наблюдатель, который позволит предугадать критический момент и предотвратить его. Получение наблюдателя из уже существующей динамической модели компенсатора представляется разумным, так как не требует больших по объему вычислений, а может свестись только к вычислению матрицы перехода между состоянием компенсатора и состоянием наблюдателя динамической системы. Поиску такой матрицы и посвящен второй параграф настоящей статьи. Далее рассмотрены случаи, когда компенсатор имеет более высокий и более низкий порядок, чем объект, а также случай компенсатора полного порядка. Для наблюдателя Люенбергера показано, что, с помощью введения параметра Юлы–Кучеры, можно получить эквивалентный компенсатор в форме наблюдателя с сохранением справедливости принципа разделения.

1. Постановка задачи

В статье рассматривается дискретная динамическая система, заданная в пространстве состояний (A, B, C, D) -представлением:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + By_k, \\ y_k &= Cx_k + Du_k,\end{aligned}$$

где x_k — состояние системы; y_k — наблюдаемый выход; z_k — управляемый выход; u_k — управляющий сигнал. Для данного объекта имеется произвольный

динамический компенсатор

$$x_{k+1}^R = A^R x_k^R + B^R y_k, \quad (1)$$

$$u_k = C^R x_k^R + D^R y_k, \quad (2)$$

где матрица D^R в общем случае не равна нулевой матрице. Требуется получить оценку $\hat{x}_k$ всего вектора состояния объекта управления на основе уже известного компенсатора. Заметим, что динамику компенсатора в форме записи (1)–(2) определяют только два статических параметра: A^R и B^R . Иначе говоря, если рассматривать поведение объекта управления в реальном времени, для обновления данных о состоянии компенсатора фактически не нужны большие объемы численных данных.

Использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n -мерное пространство действительных чисел, $\hat{x}_k$ — оценка переменной x_k .

2. Компенсатор в форме наблюдателя

В данном разделе будет продемонстрирован процесс построения наблюдателя для заданного объекта на основе некоторого уже известного компенсатора. Основная идея будет заключаться в поиске преобразования T координат компенсатора, которое позволит получить адекватную оценку пространства состояния исходного объекта.

Пусть задана система уравнений, описывающих динамику объекта

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (3)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k, \quad (4)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Также полагаем, что известен компенсатор, заданный своим (A, B, C, D) -представлением:

$$x_{k+1}^R = A^R x_k^R + B^R y_k, \quad (5)$$

$$u_k = C^R x_k^R + D^R y_k. \quad (6)$$

Собственная динамика компенсатора (5)–(6) не должна содержать в явном виде управление, поэтому необходимо преобразовать (5) так, чтобы правая часть содержала слагаемые только с измеряемой частью пространства состоя-

ний объекта управления и компоненты пространства состояний компенсатора

$$\begin{aligned} x_{k+1}^R &= \{A^R + B^R D(I - D^R D)^{-1} C^R\} x_k^R + B^R D(I - D^R D)^{-1} D^R C x_k, \\ u_k &= (I - D^R D)^{-1} C^R x_k^R + (I - D^R D)^{-1} D^R C x_k, \end{aligned} \quad (7)$$

здесь Cx_k можно считать виртуальным выходом системы (3)–(4). При формировании управления (7) необходимо потребовать невырожденность матрицы $I - D^R D$.

Поскольку мы ищем компенсатор в форме наблюдателя, который был бы эквивалентен исходному (5)–(6) с точки зрения сохранения входно-выходных соотношений, необходимо потребовать совпадение компонент пространства состояний компенсатора x_k^R и вектора координат наблюдателя Люенбергера для объекта (3):

$$x_k^R = \hat{z}_k. \quad (8)$$

Другими словами, $z_k = T x_k$. Наблюдатель Люенбергера порядка n_R для динамической системы может быть построен, если найдутся такие $T \in \mathbb{R}^{n_R \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n_R \times n_R}$, $G \in \mathbb{R}^{n_R \times p}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_R \times m}$, что

$$\hat{z}_{k+1} = F \hat{z}_k + G y_k + B_1 u_k \quad (9)$$

обеспечивает сходимость к нулю невязки между координатами объекта в пространстве и их оценкой: $z_k - \hat{z}_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Используя (4) в совокупности с уравнением (9), получаем уравнение, описывающее динамику наблюдателя

$$\hat{z}_{k+1} = F \hat{z}_k + G C x_k + (G D + B_1) u_k. \quad (10)$$

Обозначим коэффициент при управлении в (10), через TB :

$$TB = G D + B_1. \quad (11)$$

Тогда наблюдатель (10) примет классический вид

$$\hat{z}_{k+1} = F \hat{z}_k + G C x_k + T B u_k. \quad (12)$$

Получим аналогичное уравнение для поиска неизвестных матриц F , G и T исходя из (3):

$$T x_{k+1} = T A x_k + T B u_k.$$

Вычитая из последнего уравнения (12), мы получаем выражение, описывающее динамику ошибки между преобразованными координатами исходного объекта и их оценкой:

$$z_{k+1} - \hat{z}_{k+1} = TAx_k - F\hat{z}_k - GCx_k.$$

Поскольку с ростом k невязка между z_k и $\hat{z}_k$ должна уменьшаться, т.е. $z_k - \hat{z}_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, необходимо потребовать выполнение следующего условия:

$$TA - FT - GC = 0. \quad (13)$$

Вернемся к уравнению для наблюдателя (9). Замыкаем его обратной связью — управлением (7):

$$\hat{z}_{k+1} = \{F + TB(I - D^R D)^{-1} C^R\} \hat{z}_k + \{G + TB(I - D^R D)^{-1} D^R\} Cx_k. \quad (14)$$

Покажем, что при использовании оценки (14) для формирования управления (7) справедливость принципа разделения сохраняется. Для этого необходимо замкнуть систему (3) законом управления (7):

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \varepsilon_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B\tilde{D}D^R C + B\tilde{D}C^R T & -B\tilde{D}C^R \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $\varepsilon_k = Tx_k - \hat{z}_k$. Если устойчивы матрицы F и $A + B\tilde{D}D^R C + B\tilde{D}C^R T$, то и система (15) устойчива.

Уравнение (14) должно описывать ту же динамику, что и уравнение (5), поскольку состояние наблюдателя совпадает с состоянием компенсатора (8). Отсюда следует, что соответствующие матрицы должны быть равны

$$A^R + B^R D (I - D^R D)^{-1} C^R = F + TB (I - D^R D)^{-1} C^R,$$

$$B^R (I + D(I - D^R D)^{-1} D^R) = G + TB(I - D^R D)^{-1} D^R.$$

Неизвестными в данном случае являются матрицы F и G , которые находятся алгебраическим способом

$$F = A^R + B^R D \tilde{D} C^R - TB \tilde{D} C^R, \quad (16)$$

$$G = B^R (I + D \tilde{D} D^R) - TB \tilde{D} D^R, \quad (17)$$

где $\tilde{D} = (I - D^R D)^{-1}$. Подставляя полученные выражения для F и G в уравнение Люенбергера (13), получаем матричное алгебраическое уравнение

относительно неизвестного преобразования T :

$$T(A + B\tilde{D}D^RC) - (A^R + B^RD\tilde{D}C^R)T + \\ + TB\tilde{D}C^RT - B^R(I + D\tilde{D}D^R)C = 0. \quad (18)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению неизвестной матрицы T , которая является решением несимметричного уравнения Риккати (18). Далее вычисляются матрицы F , G и B_1 . Уравнение (18) может быть переписано в следующем виде:

$$(T \quad -I) \begin{pmatrix} A + B\tilde{D}D^RC & B\tilde{D}C^R \\ B^R(I + D\tilde{D}D^R)C & A^R + B^RD\tilde{D}C^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ T \end{pmatrix} = 0.$$

3. Компенсатор повышенного порядка

В данном разделе мы рассмотрим проблему поиска параметра Юлы — Кучеры порядка $n_R - n$, коэффициентов усиления K_c и K_f , таких что система

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + K_f(y_k - C\hat{x}_k - Du_k), \quad (19)$$

$$x_{k+1}^Q = A^Q x_k^Q + B^Q(y_k - C\hat{x}_k - Du_k), \quad (20)$$

$$u_k = -K_c\hat{x}_k + C^Q x_k^Q + D^Q(y_k - C\hat{x}_k). \quad (21)$$

будет эквивалентна компенсатору (6)–(8). Полагаем, что матрица T получена с использованием техники, предложенной в предыдущей главе. Соответственно, матрицы F , B_1 и G вычисляются из (11), (16), (17). На основе наблюдателя (9) получаем оценку $\hat{x}_k$.

Выпишем матрицу замкнутой системы (3), (20):

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1}^Q \\ \varepsilon_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - B(I - D)^{-1}K_c & B(I - D)^{-1}C^Q & B(I - D)^{-1}(K_c + D^QC) \\ 0 & A^Q & B^QC \\ 0 & 0 & A - K_fC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_k^Q \\ \varepsilon_k \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_k = x_k - \hat{x}_k$.

Исходя из такого представления можно сделать следующие выводы. Пусть выполнены условия:

- 1) собственные числа матрицы свободного дрейфа параметра Юлы — Кучеры должны лежать внутри единичной окружности;
- 2) матрица $A - K_f C$ должна быть устойчивой по Шуру;
- 3) собственные числа матрицы $A - B(I - D)^{-1} K_c$ должны лежать внутри единичной окружности.

Тогда система (3), (20) будет устойчивой.

Применим к матрице F метод триангуляции Шура (приведение матрицы к верхнему треугольному виду). В результате получим декомпозицию исходной матрицы на блоки размером $n_R - n$ и n .

$$F = V \tilde{F} V^* = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ 0 & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где $V V^* = I_{n_R}$, $\tilde{F}_{11} \in \mathbb{R}^{n_R - n \times n_R - n}$ и $\tilde{F}_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Сделаем первую замену переменных:

$$\hat{z}_k = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_k^1 \\ \omega_k^2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Опишем динамику наблюдателя в новых переменных ω_k :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{k+1}^1 \\ \omega_{k+1}^2 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ 0 & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_k^1 \\ \omega_k^2 \end{pmatrix} + G y_k + B_1 u_k. \end{aligned} \quad (24)$$

Умножим (24) на $(V_1^* \ V_2^*)^T$ слева:

$$\begin{pmatrix} \omega_{k+1}^1 \\ \omega_{k+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ 0 & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_k^1 \\ \omega_k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} G y_k + \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} B_1 u_k. \quad (25)$$

Если ввести следующие обозначения

$$\begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} \tilde{G}_1 \\ \tilde{G}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix},$$

то уравнение динамики (25) примет вид

$$\omega_{k+1}^1 = \tilde{F}_{11}\omega_k^1 + \tilde{F}_{12}\omega_k^2 + \tilde{G}_1 y_k + \tilde{B}_1 u_k, \quad (26)$$

$$\omega_{k+1}^2 = \tilde{F}_{22}\omega_k^2 + \tilde{G}_2 y_k + \tilde{B}_2 u_k. \quad (27)$$

Уравнение Люенбергера (13) также умножим на $(V_1^* \ V_2^*)^T$ слева. В новых обозначения получим систему из двух уравнений:

$$\tilde{T}_1 A - \tilde{F}_{11}\tilde{T}_1 - \tilde{F}_{12}\tilde{T}_2 - \tilde{G}_1 C = 0, \quad (28)$$

$$\tilde{T}_2 A - \tilde{F}_{22}\tilde{T}_2 - \tilde{G}_2 C = 0. \quad (29)$$

Поскольку размерность векторной переменной ω_k^2 совпадает с размерностью оценки вектора состояния объекта управления $\hat{x}_k$, можно сделать следующую замену переменных:

$$\omega_k^2 = \tilde{T}_2 \hat{x}_k. \quad (30)$$

Из уравнения (29) выразим $\tilde{F}_{22}$:

$$\tilde{F}_{22} = (\tilde{T}_2 A - \tilde{G}_2 C) \tilde{T}_2^{-1}. \quad (31)$$

После умножения на $\tilde{T}_2^{-1}$ (27) слева, используя (31), получаем

$$\hat{x}_{k+1} = A \hat{x}_k + \tilde{T}_2^{-1} (\tilde{G}_2 D + B_2) u_k. \quad (32)$$

Из уравнения (28) выразим $\tilde{F}_{12}$:

$$\tilde{F}_{12} = (\tilde{T}_1 A - \tilde{F}_{11}\tilde{T}_1 - \tilde{G}_1 C) \tilde{T}_2^{-1}. \quad (33)$$

Полученный результат (33) применим к (26):

$$\omega_{k+1}^1 = \tilde{F}_{11}\omega_k^1 + (\tilde{T}_1 A - \tilde{F}_{11}\tilde{T}_1 - \tilde{G}_1 C) \tilde{T}_2^{-1} \omega_k^2 + \tilde{G}_1 y_k + \tilde{B}_2 u_k. \quad (34)$$

Умножим (32) на $\tilde{T}_1$ слева и вычтем из (34):

$$\omega_{k+1}^1 - \tilde{T}_1 \hat{x}_{k+1} = \tilde{F}_{11}(\omega_k^1 - \tilde{T}_1 \hat{x}_k) + [\tilde{G}_1 D + \tilde{B}_1 - \tilde{T}_1 \tilde{T}_2^{-1}(\tilde{G}_2 D + \tilde{B}_2)] u_k. \quad (35)$$

Теперь можно обозначить за новую переменную x_k^Q следующее выражение:

$$x_k^Q = \omega_k^1 - \tilde{T}_1 \hat{x}_k. \quad (36)$$

Тогда уравнение (35) примет более удобный вид

$$x_{k+1}^Q = \tilde{F}_{11} x_k^Q + [\tilde{G}_1 D + \tilde{B}_1 - \tilde{T}_1 \tilde{T}_2^{-1}(\tilde{G}_2 D + \tilde{B}_2)] u_k. \quad (37)$$

Установим связь между состоянием компенсатора x_k^R и новыми переменными $\hat{x}_k$ и x_k^Q с помощью (8), (23), (30) и (36):

$$x_k^R = (V_1 \ T) \begin{pmatrix} x_k^Q \\ \hat{x}_k \end{pmatrix}.$$

Формирование закона управления теперь необходимо сформулировать в терминах переменных $x_k^Q, \hat{x}_k$

$$\begin{aligned} u_k &= C^R x_k^R + D^R y_k = C^R T \hat{x}_k + C^R V_1 x_k^Q + D^R y_k = \\ &= (C^R T + D^R C) \hat{x}_k + C^R V_1 x_k^Q + D^R (y_k - C \hat{x}_k). \end{aligned} \quad (38)$$

Сравнивая (32) и (19), (37) и (20), (38) и (21), получаем

$$K_f = [B - (V_2^* T)^{-1} V_2^* (G D + B_1)] D^{-1}, \quad (39)$$

$$K_c = - (C^R T + D^R C),$$

$$A^Q = \tilde{F}_{11} = V_1^* F V_1,$$

$$B^Q = V_1^* (I - T(V_2^* T)^{-1} V_2^*) (G D + B_1),$$

$$C^Q = C^R V_1,$$

$$D^Q = D^R. \quad (40)$$

4. Компенсатор пониженного порядка

Пусть задан компенсатор, порядок которого ниже порядка объекта $n_R < n$. Тогда система (19)–(21) будет несправедлива, но мы можем синтезировать наблюдатель пониженного порядка.

Рассмотрим сначала случай, когда оценку пространства состояний можно получить путем линейной комбинации выходных переменных и переменных наблюдателя.

$$\hat{x}_k = H_1 \hat{z}_k + H_2 y_k.$$

Этот подход верен, если выполнено ограничение на матрицы H_1 и H_2

$$H_1 T + H_2 C = I.$$

Другими словами, ранг матрицы $[T^T \ C^T]$ должен быть равен n . Система для наблюдателя принимает вид

$$\begin{aligned}\hat{z}_{k+1} &= F \hat{z}_k + G y_k + B_1 u_k, \\ \hat{x}_k &= H_1 \hat{z}_k + H_2 y_k, \\ u_k &= -K_c \hat{x}_k + D^Q (y_k - C \hat{x}_k).\end{aligned}\tag{41}$$

Сравнивая (41) с (6), можно получить соотношения для поиска K_c , D^Q , H_1 и H_2 :

$$C^R = -(K_c + D^Q C) H_1,\tag{42}$$

$$D^R = D^Q - K_c H_2 - D^Q C H_2,\tag{43}$$

$$H_1 T + H_2 C = I.$$

Умножим (42) на T справа и просуммируем с уравнением (43), умноженным на C справа. Приведем окончательный результат:

$$K_c = -C^R T - D^R C.$$

Находим H_1 и H_2 следующим образом:

$$(H_1 \ H_2) = \begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix}^{-1}.$$

Поскольку уравнения (42), (43) справедливы для любого D^Q вследствие

$$\begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix} (H_1 \ H_2) = \begin{pmatrix} TH_1 & TH_2 \\ CH_1 & CH_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_R} & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix},$$

можно полагать, что $D^Q = 0$.

Мы рассмотрели вариант, когда $n^R + p = n$. Если предположить выполнение неравенства $n^R > n - p$, то поиск неизвестных матриц H_1 и H_2 будет заключаться в решении уравнений

$$\begin{aligned} H_1 &= [T^T T + C^T C]^{-1} T^T, \\ H_2 &= [T^T T + C^T C]^{-1} C^T. \end{aligned}$$

Матрица D^Q вычисляется согласно (42) и (43).

Для случая $n^R < n - p$ нельзя предложить технику нахождения укороченного наблюдателя. Хотя динамика ошибки $\varepsilon_z = Tx - \hat{z}$ стремится к нулю, остается часть пространства состояний объекта, поведение которой остается неизвестным и неоцениваемым.

5. Компенсатор порядка объекта управления

Если порядок компенсатора n^R равен порядку объекта управления n , то матрица T преобразования компонент пространства состояний объекта квадратная. Тогда декомпозиция Шура (22) вырождается, поскольку V_2 будет иметь порядок n , в то время как матрица V_1 будет пустой. В этом случае параметр Юлы — Кучеры будет представлять собой статический коэффициент усиления $D^Q = D^R$, матрицы K_f и K_c вычисляются аналогично (39)–(40)

$$\begin{aligned} K_f &= [B - T^{-1} (GD + B_1)] D^{-1}, \\ K_c &= - (C^R T + D^R C), \\ D^Q &= D^R. \end{aligned}$$

6. Решение несимметричного уравнения Риккати

Выше было выведено несимметричное уравнение Риккати (18) относительно неизвестного преобразования T . Решение данного типа уравнений

можно найти в результате применения техники инвариантных подпространств, которая заключается в следующем.

1. Находят n -мерное инвариантное подпространство S матрицы замкнутой системы A_{cl} . В нашем случае

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} A + B\tilde{D}D^RC & B\tilde{D}C^R \\ B^R(I + D\tilde{D}D^R)C & A^R + B^RD\tilde{D}C^R \end{pmatrix}.$$

Инвариантное подпространство может быть найдено как решение уравнения

$$A_{cl}U = U\Lambda, \quad (44)$$

которое может быть вычислено с помощью факторизации Шура матрицы замкнутой системы A_{cl} [5].

2. Найденную матрицу U , согласно (44), на две составляющие:

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad U_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

3. Решение уравнения (18) вычисляется как $T = U_2^{-1} \cdot U_1$.

В работе [4] показано, что решение T уравнения (18) может быть найдено в том случае, когда все собственные значения гамильтониана матрицы A_{cl} различны. В общем случае, существует несколько допустимых подпространств S и, как следствие, несколько решений. Число этих решений, как и количество инвариантных подпространств S , зависит от выбора n собственных значений матрицы A_{cl} .

Если имеется объект управления порядка n и динамический компенсатор порядка n_R , то можно найти преобразование $T_{n_R \times n}$, которое дает возможность получить оценку компонент пространства состояний исходного объекта исходя из полностью известного вектора состояний динамического компенсатора. Подобные результаты получены в работе [2].

7. Пример

Приведенный ниже пример демонстрирует технику нахождения преобразования, позволяющего получать оценку пространства состояний объекта из

пространства состояний произвольного динамического компенсатора. Объект управления синтезирован в MatLab как случайная дискретная система, заданная своим (A, B, C, D) -представлением

$$A = \begin{pmatrix} 0.4279 & -0.2368 & 0.238 & -0.07112 & -0.04209 \\ -0.3167 & 0.4445 & 0.08599 & 0.0732 & 0.2731 \\ 0.1261 & -0.07832 & 0.2045 & 0.09331 & 0.2217 \\ -0.0244 & 0.1118 & 0.05136 & 0.7449 & -0.1913 \\ 0.05267 & 0.336 & 0.1149 & -0.1822 & 0.5821 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$B = \begin{pmatrix} -0.03005 & -0.8637 \\ -0.1649 & 0.07736 \\ 0.6277 & 0 \\ 1.093 & -1.114 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0.2256 & 0 & 1.544 & -0.7423 \\ -0.7697 & 1.117 & 0 & 0.08593 & -1.062 \\ 0.3714 & -1.089 & 1.101 & -1.492 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -0.6156 & 0 \\ 0 & -0.7648 \\ -0.1924 & 0 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Система (45)–(46) полностью отвечает свойствам наблюдаемости и управляемости. Тогда LQG-компенсатор будет следующим:

$$A^R = \begin{pmatrix} 0.2598 & 0.1017 & 0.0700 & -0.0545 & -0.0315 \\ -0.1878 & 0.1135 & 0.2917 & 0.1254 & 0.1946 \\ 0.0416 & 0.0466 & 0.2062 & -0.0043 & 0.1400 \\ -0.0024 & 0.0704 & 0.1700 & -0.0609 & 0.1244 \\ 0.0341 & 0.2075 & 0.2887 & 0.0737 & 0.2547 \end{pmatrix},$$

$$B^R = \begin{pmatrix} 0.0971 & -0.1097 & 0.1456 \\ -0.1840 & 0.0754 & -0.1838 \\ 0.0066 & -0.1136 & -0.0063 \\ 0.2576 & 0.0059 & -0.1237 \\ -0.2966 & -0.0955 & -0.1570 \end{pmatrix},$$

$$C^R = \begin{pmatrix} 0.0053 & 0.0003 & -0.0073 & -0.1316 & 0.0464 \\ 0.0315 & -0.0374 & 0.0076 & 0.0554 & -0.0552 \end{pmatrix},$$

$$D^R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица T преобразования координат объекта управления и компонент вектора пространства состояний динамического компенсатора ищется как решение уравнения (44)

$$T = \begin{pmatrix} 21.8661 & -5.2771 & 19.3214 & 41.7804 & -2.6227 \\ -5.7917 & 2.4647 & -5.3630 & -11.5968 & 0.7280 \\ -24.3537 & 6.1591 & -21.5508 & -48.7637 & 3.0611 \\ 18.8700 & -4.7723 & 17.4730 & 38.7835 & -2.3718 \\ 32.1864 & -8.1400 & 29.8036 & 64.4472 & -3.0456 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 и 2 представлены графики оценок $\hat{x}_k$ пространства состояний x_k для четвертой и пятой компонент соответственно.

Рис. 1. Оценка z_k четвертой компоненты пространства состояний

Рис. 2. Оценка z_k четвертой компоненты пространства состояний

Заключение

В статье описывается техника построения наблюдателя дискретного времени на основе уже известного произвольного динамического компенсатора. Для компенсатора повышенного порядка вводится параметр Юлы — Кучеры. Наблюдатель восстанавливается из компенсатора повышенного, полного и пониженного порядка, а матрица перехода между оценкой вектора пространства состояний объекта управления и компонентами пространства состояний компенсатора вычисляется как решение несимметричного уравнения Риккати. Результаты могут быть применены для H_∞ компенсаторов или компенсаторов, построенных на основе анизотропийного подхода.

Список литературы

1. Alazard D., Apkarian P. Exact observer-based structures for arbitrary compensators // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1999. No. 9. P. 101–118.

2. Fowell R.A., Bender D.J., Assal A.F. Estimating the plant state from the compensator state // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. Vol. AC-31, No. 10. P. 964–967.
3. Luenberger D.G. An introduction to observers // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. Vol. AC16, no. 6. P. 596–602.
4. Narasimhamurthi N., Wu F.F. On the Riccati equation arising from the study of singularly perturbed systems // IEEE Joint Automatic Control Conference, 22–24 June. New-York: IEEE, 1977.
5. Golub G.H., van Loan C.F. Matrix — Computations. 3rd ed. Baltimore: The John Hopkins University Press, 1996. (Ser. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences).

Discrete observer based compensator

12, December 2012

DOI: 10.7463/1212.0500592

Yurchenkov A. V.

Russia, Bauman Moscow State Technical University
alexander.yurchenkov@gmail.com**Introduction**

The various structure observers have wide applications for different practical reasons. The design of feedback control law as a static gain requires precise knowledge of full information about state of the plant that may not usually be measured. This problem can be solved by means of an observer. The observer provides true estimate of the plant state. But some assumptions of the separation principle should be tested to maintain stability of a system.

When a dynamic compensator is given, one can derive the observer-based compensator. This kind of compensators provides estimate of a physical plant state. This property is false for compensators in other presentation.

The definitions are standard. An arbitrary compensator is a device with a state-space description

$$\begin{aligned}x_{k+1}^R &= A^R x_k^R + B^R y_k, \\ u_k &= C^R x_k^R + D^R y_k,\end{aligned}$$

where D^R is non-zero matrix, $\mathbb{R}^n$ is n -dimensional space, $\hat{x}_k$ is an estimate of x_k . Note that only two static gains A^R and B^R define the inner controller dynamics. Indeed, assuming the plant model is available in real-time, the observer based compensator does not require the huge storage of numerical data, but only two static gains for update the controller dynamics at each sample of time.

In [1, 2] a case of continues-time compensator is considered. However, only the main idea how to construct a discrete-time observer-based compensator was pointed out. In this work we consider an application of the similar technique to the arbitrary discrete-time compensator following [1].

The main purpose of this paper is to introduce a transformation T that allows to reconstruct the arbitrary compensator to the observer based compensator. This paper is organized as follows. The first paragraph is devoted to searching T transformation. The second paragraph describes the case of the augmented-order compensator. The third one concerns the case of the reduced-order compensator. The fourth paragraph is devoted to the full-order compensator. The fifth paragraph describes how the solution of non-symmetric Riccati equation can be calculated. The last paragraph contains a numerical example.

8. Observer based Compensator

In this section let us show the method of dynamic observer design. The observer is constructed on the base of known arbitrary compensator. The goal is to find the transformation matrix T , which is able to provide true estimation of the state of dynamic plant.

We say that the following equations describe the dynamics of given plant

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (1)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k, \quad (2)$$

Here $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, and $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. We assume the state-space description of the compensator is known

$$x_{k+1}^R = A^R x_k^R + B^R y_k, \quad (3)$$

$$u_k = C^R x_k^R + D^R y_k. \quad (4)$$

The compensator dynamics (3)–(4) must be independent with respect to input signal u . So we should rewrite (3). The right hand part of the equation (3) combines the state-space of the compensator and measured output so that

$$\begin{aligned} x_{k+1}^R &= \{A^R + B^R D(I - D^R D)^{-1} C^R\} x_k^R + B^R D(I - D^R D)^{-1} D^R C x_k, \\ u_k &= (I - D^R D)^{-1} C^R x_k^R + (I - D^R D)^{-1} D^R C x_k, \end{aligned} \quad (5)$$

here Cx_k is defined as a virtual output of the system (1)–(2). The control law (5) requires the matrix $(I - D^R D)$ to be invertible.

Since our goal is to find discrete observer based compensator that is equal to the original compensator (3)–(4), the compensator state-space x_k^R is to coincide with the state-space of Luenberger observer for the object (1):

$$x_k^R = \hat{z}_k. \quad (6)$$

In other words, we assume $z_k = Tx_k$. The Luenberger observer of the dynamic system can be built if there exist the matrices $T \in \mathbb{R}^{n_R \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n_R \times n_R}$, $G \in \mathbb{R}^{n_R \times p}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_R \times m}$ such that

$$\hat{z}_{k+1} = F\hat{z}_k + Gy_k + B_1u_k \quad (7)$$

holds $z_k - \hat{z}_k \rightarrow 0$ when $k \rightarrow \infty$. This means that the error between an object state and its estimate tends to zero. Using (2) and (7) we can get the next equation

$$\hat{z}_{k+1} = F\hat{z}_k + GCx_k + (GD + B_1)u_k. \quad (8)$$

Define the matrix coefficient before input u_k in (8) as TB :

$$GD + B_1 = TB. \quad (9)$$

Then the observer (8) becomes the classical Luenberger observer

$$\hat{z}_{k+1} = F\hat{z}_k + GCx_k + TBu_k. \quad (10)$$

Now let us find unknown F , G and T through (1)

$$Tx_{k+1} = TA x_k + TBu_k. \quad (11)$$

Substructing (10) from (11), one can get the expression of the error dynamics between transformed object state and its estimation

$$z_{k+1} - \hat{z}_{k+1} = TA x_k - F\hat{z}_k - GCx_k.$$

The error between z_k and $\hat{z}_k$ have to decrease while k increase, that is $z_k - \hat{z}_k \rightarrow 0$ when $k \rightarrow \infty$. Since last assumption is true it follows that

$$TA - FT - GC = 0. \quad (12)$$

Turn back to the observer equation (7). The closed loop system obtained from (7) with respect to the control law (5) is given by

$$\hat{z}_{k+1} = \{F + TB(I - D^R D)^{-1} C^R\} \hat{z}_k + \{G + TB(I - D^R D)^{-1} D^R\} C x_k. \quad (13)$$

Now we are going to demonstrate the separation principle is true if we use estimate (13) to construct the control law (5). Let us interconnect the system (1) and feedback (5) by

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \varepsilon_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B\tilde{D}D^R C + B\tilde{D}C^R T & -B\tilde{D}C^R \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}, \quad (14)$$

where $\varepsilon_k = T x_k - \hat{z}_k$. If some provide stability of the matrix F and $A + B\tilde{D}D^R C + B\tilde{D}C^R T$ the stability of the system (14) is automatically guaranteed.

The equations (13) and (3) describe the same dynamics because of the compensator state and the observer state are the same according (6). Taking into account (6) we obtain

$$\begin{aligned} A^R + B^R D(I - D^R D)^{-1} C^R &= F + TB(I - D^R D)^{-1} C^R, \\ B^R(I + D(I - D^R D)^{-1} D^R) &= G + TB(I - D^R D)^{-1} D^R. \end{aligned}$$

The unknown matrices F and G are computed as solutions of the algebraic equations

$$F = A^R + B^R D\tilde{D}C^R - TB\tilde{D}C^R, \quad (15)$$

$$G = B^R(I + D\tilde{D}D^R) - TB\tilde{D}D^R, \quad (16)$$

where $\tilde{D} = (I - D^R D)^{-1}$. Substituting the expressions (15), (16) for F and G to the Luenberger equation (12) one can get non-symmetric Riccati equation with respect to T :

$$\begin{aligned} T(A + B\tilde{D}D^R C) - (A^R + B^R D\tilde{D}C^R)T + \\ + TB\tilde{D}C^R T - B^R(I + D\tilde{D}D^R)C = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

So our main problem is to find some solution T of the equation (17). There are various techniques for solving the equation (17). We use the standard method of invariant subspaces. Another form of equation (17) is the so called Hamiltonian

form:

$$(T \quad -I) \begin{pmatrix} A + B\tilde{D}D^RC & B\tilde{D}C^R \\ B^R(I + D\tilde{D}D^R)C & A^R + B^RD\tilde{D}C^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ T \end{pmatrix} = 0. \quad (18)$$

By [5] it follows that the matrices F , G and B_1 are easily computed. The Hamiltonian matrix (18) is a matrix of the closed-loop system.

9. Augmented-Order Compensator

This section is devoted to the Youla parameterization with order $n_R - n$, such that the system

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + K_f(y_k - C\hat{x}_k - Du_k), \quad (19)$$

$$x_{k+1}^Q = A^Q x_k^Q + B^Q(y_k - C\hat{x}_k - Du_k), \quad (20)$$

$$u_k = -K_c\hat{x}_k + C^Q x_k^Q + D^Q(y_k - C\hat{x}_k). \quad (21)$$

is equal to the original compensator (4)–(6). Here K_c and K_f are some static gains. Consider the matrix T is calculated by the previous technique. The matrices F , B_1 and G are determined (9), (15), (16) respectively. The estimate $\hat{x}_k$ is computed by (7).

The closed-loop system (1), (20) is given by

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1}^Q \\ \varepsilon_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - B(I - D)^{-1}K_c & B(I - D)^{-1}C^Q & B(I - D)^{-1}(K_c + D^QC) \\ 0 & A^Q & B^QC \\ 0 & 0 & A - K_fC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_k^Q \\ \varepsilon_k \end{pmatrix},$$

The closed-loop matrix of is

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} A - B(I - D)^{-1}K_c & B(I - D)^{-1}C^Q & B(I - D)^{-1}(K_c + D^QC) \\ 0 & A^Q & B^QC \\ 0 & 0 & A - K_fC \end{pmatrix},$$

where $\varepsilon_k = x_k - \hat{x}_k$. Hence, stability of the closed-loop system depends on some statements:

1) eigenvalues of the open-loop Youla parameter matrix have to lie in the open unit disk;

2) the matrix $A - K_f C$ have to be Schur stable;

3) eigenvalues of matrix $A - B(I - D)^{-1} K_c$ have to lie in the open unit disk.

Under this notions the system (1), (20) is assumed to be Schur stable.

Consider the Schur decomposition method for the matrix F . As a result, we get a special matrix as a 2 by 2 matrix with block sizes $n_R - n$ and n :

$$F = V \tilde{F} V^* = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ 0 & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix}, \quad (22)$$

where $V V^* = I_{n_R}$, $\tilde{F}_{11} \in \mathbb{R}^{n_R-n \times n_R-n}$ and $\tilde{F}_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Let us change the variable

$$\hat{z}_k = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_k^1 \\ \omega_k^2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

From (23) it follows that the dynamics of (7) is described by

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{k+1}^1 \\ \omega_{k+1}^2 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ 0 & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_k^1 \\ \omega_k^2 \end{pmatrix} + G y_k + B_1 u_k. \end{aligned} \quad (24)$$

Now we apply left multiplying of (24) by $(V_1^* \ V_2^*)^T$

$$\begin{pmatrix} \omega_{k+1}^1 \\ \omega_{k+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ 0 & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_k^1 \\ \omega_k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} G y_k + \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} B_1 u_k. \quad (25)$$

By definition, put

$$\begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} \tilde{G}_1 \\ \tilde{G}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 \\ \tilde{T}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

From (26) it follows that the dynamics equation (25) changes the next way

$$\omega_{k+1}^1 = \tilde{F}_{11} \omega_k^1 + \tilde{F}_{12} \omega_k^2 + \tilde{G}_1 y_k + \tilde{B}_1 u_k, \quad (27)$$

$$\omega_{k+1}^2 = \tilde{F}_{22} \omega_k^2 + \tilde{G}_2 y_k + \tilde{B}_2 u_k. \quad (28)$$

Multiplying the Luenberger equation (12) by $(V_1^* \ V_2^*)^T$, we obtain two equations:

$$\tilde{T}_1 A - \tilde{F}_{11} \tilde{T}_1 - \tilde{F}_{12} \tilde{T}_2 - \tilde{G}_1 C = 0, \quad (29)$$

$$\tilde{T}_2 A - \tilde{F}_{22} \tilde{T}_2 - \tilde{G}_2 C = 0. \quad (30)$$

The order of ω_k^2 is equal to the order of state-space estimate $\hat{x}_k$ of the plant, therefore we introduce a new change of variables

$$\omega_k^2 = \tilde{T}_2 \hat{x}_k. \quad (31)$$

From equation (30) one can derive $\tilde{F}_{22}$

$$\tilde{F}_{22} = (\tilde{T}_2 A - \tilde{G}_2 C) \tilde{T}_2^{-1}. \quad (32)$$

After left multiplying of (28) by $\tilde{T}_2^{-1}$ and using (32) we get a result:

$$\hat{x}_{k+1} = A \hat{x}_k + \tilde{T}_2^{-1} (\tilde{G}_2 D + B_2) u_k. \quad (33)$$

From the equation (29) one easily derives $\tilde{F}_{12}$

$$\tilde{F}_{12} = (\tilde{T}_1 A - \tilde{F}_{11} \tilde{T}_1 - \tilde{G}_1 C) \tilde{T}_2^{-1}. \quad (34)$$

Combining (34) and (27) we get

$$\omega_{k+1}^1 = \tilde{F}_{11} \omega_k^1 + (\tilde{T}_1 A - \tilde{F}_{11} \tilde{T}_1 - \tilde{G}_1 C) \tilde{T}_2^{-1} \omega_k^2 + \tilde{G}_1 y_k + \tilde{B}_2 u_k. \quad (35)$$

One can left multiply (33) by $\tilde{T}_1$ and subtract it from (35)

$$\omega_{k+1}^1 - \tilde{T}_1 \hat{x}_{k+1} = \tilde{F}_{11} (\omega_k^1 - \tilde{T}_1 \hat{x}_k) + [\tilde{G}_1 D + \tilde{B}_1 - \tilde{T}_1 \tilde{T}_2^{-1} (\tilde{G}_2 D + \tilde{B}_2)] u_k. \quad (36)$$

Now we are ready to apply the last change of variables x_k^Q

$$x_k^Q = \omega_k^1 - \tilde{T}_1 \hat{x}_k. \quad (37)$$

which puts the equation (36) to more readable form.

$$x_{k+1}^Q = \tilde{F}_{11} x_k^Q + [\tilde{G}_1 D + \tilde{B}_1 - \tilde{T}_1 \tilde{T}_2^{-1} (\tilde{G}_2 D + \tilde{B}_2)] u_k. \quad (38)$$

Let us show that there exists correlation between the compensator state x_k^R and variables $\hat{x}_k$ and x_k^Q by means of (6), (23), (31) and (37)

$$x_k^R = (V_1 \ T) \begin{pmatrix} x_k^Q \\ \hat{x}_k \end{pmatrix}.$$

We need rewrite the control law in terms of variables $x_k^Q, \hat{x}_k$

$$\begin{aligned} u_k &= C^R x_k^R + D^R y_k = C^R T \hat{x}_k + C^R V_1 x_k^Q + D^R y_k = \\ &= (C^R T + D^R C) \hat{x}_k + C^R V_1 x_k^Q + D^R (y_k - C \hat{x}_k). \end{aligned} \quad (39)$$

Compare (33) and (19), (38) and (20), (39) and (21) we obtain the next connection

$$\begin{aligned} K_f &= [B - (V_2^* T)^{-1} V_2^* (GD + B_1)] D^{-1}, \\ K_c &= - (C^R T + D^R C), \\ A^Q &= \tilde{F}_{11} = V_1^* F V_1, \\ B^Q &= V_1^* (I - T(V_2^* T)^{-1} V_2^*) (GD + B_1), \\ C^Q &= C^R V_1, \\ D^Q &= D^R. \end{aligned} \quad (40)$$

10. Reduced-order compensator

Let us consider the case $n_R < n$. The order of the compensator is n_R and order of the object is n . Then the system (19)–(21) is no longer valid. But we can construct a reduced-order compensator.

Consider $n^R + p = n$, where p is the rank of C . Then we can estimate the space-state of the object via linear combination of the output signal and the observer state.

$$\hat{x}_k = H_1 \hat{z}_k + H_2 y_k.$$

This method holds true under one restriction on H_1 and H_2 , that is

$$H_1 T + H_2 C = I. \quad (42)$$

In other words, the rank of matrix $(T^T \ C^T)$ is to be n . Taking into account (42) we obtain a new representation of observer

$$\begin{aligned} \hat{z}_{k+1} &= F \hat{z}_k + G y_k + B_1 u_k, \\ \hat{x}_k &= H_1 \hat{z}_k + H_2 y_k, \\ u_k &= -K_c \hat{x}_k + D^Q (y_k - C \hat{x}_k). \end{aligned} \quad (43)$$

One can compare (43) and (4). The reader will have no difficulty in showing that matrices K_c , D^Q , H_1 and H_2 could be calculated according relationships

$$C^R = -(K_c + D^Q C) H_1, \quad (44)$$

$$D^R = D^Q - K_c H_2 - D^Q C H_2, \quad (45)$$

$$H_1 T + H_2 C = I.$$

Summing (44) multiplied by T on left hand side and (45) multiplied by C on right hand side we obtain the follow equation for K_c :

$$K_c = -C^R T - D^R C.$$

The matrices H_1 and H_2 are

$$(H_1 \ H_2) = \begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix}^{-1}.$$

Since the equations (44) and (45) hold true for every D^Q we have

$$\begin{pmatrix} T \\ C \end{pmatrix} (H_1 \ H_2) = \begin{pmatrix} T H_1 & T H_2 \\ C H_1 & C H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_R} & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix},$$

in this case we denote $D^Q = 0$ without loss of generality.

We have described the case $n^R + p = n$. If inequality $n^R > n - p$ holds, the matrices H_1 and H_2 satisfy the equations

$$H_1 = [T^T T + C^T C]^{-1} T^T,$$

$$H_2 = [T^T T + C^T C]^{-1} C^T.$$

The matrix D^Q is computed according to (44) and (45).

If $n^R < n - p$ there is no proper techniques of the reduced-order observer design. Although the estimation error $\varepsilon_z = T x - \hat{z}$ tends to zero, some part of the state-space cannot be estimated or observed.

11. Full-order compensator

If the compensator order n^R and the plant order n are equal, then the transformation matrix T of the state space is square. The Schur decomposition (22) is singular. It means that the matrix V_2 has full rank, furthermore the matrix V_1 is empty. Let us remark that the Youla parameter reduces to the static gain $D^Q = D^R$. The matrices K_f and K_c are computed according to (40)–(41)

$$\begin{aligned} K_f &= [B - T^{-1}(GD + B_1)] D^{-1}, \\ K_c &= -(C^R T + D^R C), \\ D^Q &= D^R. \end{aligned}$$

12. Non-symmetric Riccati equation

The second paragraph brought us to the non-symmetric Riccati equation (17) with respect to the unknown transformation matrix T . There is one method of solution design suggested here. The non-symmetric Riccati equation can be solved by standard invariant subspace techniques which consist in

1) finding n -dimensional invariant subspace S of the closed-loop system matrix A_{cl} . In our case

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} A + B\tilde{D}D^RC & B\tilde{D}C^R \\ B^R(I + D\tilde{D}D^R)C & A^R + B^RD\tilde{D}C^R \end{pmatrix}.$$

The invariant subspace is a solution of the equation

$$A_{cl}U = U\Lambda, \quad (46)$$

One can calculate it by means of the Schur factorizations of matrix A_{cl} [5];

2) if the matrix U was found, then it contains two subelements

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad U_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

3) finally, the solution of (17) is defined as $T = U_2^{-1} \cdot U_1$.

In [4] Narasimhamurthi and Wu showed that the transformation matrix T exists if all eigenvalues of Hamiltonian matrix A_{cl} are distinct. There are several permissible subspaces S and, as consequence, several solutions. All these solutions and invariant subspaces S depend on the choice of n eigenvalues of A_{cl} .

We should note that if the plant order is n and the dynamic compensator order is n_R then one can find the transformation matrix $T_{n_R \times n}$. This matrix computes state-space estimate of the given plant using the state-space of the compensator. The similar results are obtained in [2].

13. Example

This example illustrates the described technique of constructing the transformation matrix between the arbitrary compensator state and the plant state-space. The estimate of x_k is easily computed through the matrix T and the state-space of compensator x_k^R . The plant is designed in MatLab as an arbitrary object with (A, B, C, D) -presentation.

$$A = \begin{pmatrix} 0.4279 & -0.2368 & 0.238 & -0.07112 & -0.04209 \\ -0.3167 & 0.4445 & 0.08599 & 0.0732 & 0.2731 \\ 0.1261 & -0.07832 & 0.2045 & 0.09331 & 0.2217 \\ -0.0244 & 0.1118 & 0.05136 & 0.7449 & -0.1913 \\ 0.05267 & 0.336 & 0.1149 & -0.1822 & 0.5821 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$B = \begin{pmatrix} -0.03005 & -0.8637 \\ -0.1649 & 0.07736 \\ 0.6277 & 0 \\ 1.093 & -1.114 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0.2256 & 0 & 1.544 & -0.7423 \\ -0.7697 & 1.117 & 0 & 0.08593 & -1.062 \\ 0.3714 & -1.089 & 1.101 & -1.492 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -0.6156 & 0 \\ 0 & -0.7648 \\ -0.1924 & 0 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

The system (47)–(48) is controllable and observable. The Optimization Toolbox produces the following LQG-compensator.

$$A^R = \begin{pmatrix} 0.2598 & 0.1017 & 0.0700 & -0.0545 & -0.0315 \\ -0.1878 & 0.1135 & 0.2917 & 0.1254 & 0.1946 \\ 0.0416 & 0.0466 & 0.2062 & -0.0043 & 0.1400 \\ -0.0024 & 0.0704 & 0.1700 & -0.0609 & 0.1244 \\ 0.0341 & 0.2075 & 0.2887 & 0.0737 & 0.2547 \end{pmatrix},$$

$$B^R = \begin{pmatrix} 0.0971 & -0.1097 & 0.1456 \\ -0.1840 & 0.0754 & -0.1838 \\ 0.0066 & -0.1136 & -0.0063 \\ 0.2576 & 0.0059 & -0.1237 \\ -0.2966 & -0.0955 & -0.1570 \end{pmatrix},$$

$$C^R = \begin{pmatrix} 0.0053 & 0.0003 & -0.0073 & -0.1316 & 0.0464 \\ 0.0315 & -0.0374 & 0.0076 & 0.0554 & -0.0552 \end{pmatrix},$$

$$D^R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The matrix T have been computed as a solution of the equation (46). It is the desired transformation matrix between the state-spaces of the compensator and plant:

$$T = \begin{pmatrix} 21.8661 & -5.2771 & 19.3214 & 41.7804 & -2.6227 \\ -5.7917 & 2.4647 & -5.3630 & -11.5968 & 0.7280 \\ -24.3537 & 6.1591 & -21.5508 & -48.7637 & 3.0611 \\ 18.8700 & -4.7723 & 17.4730 & 38.7835 & -2.3718 \\ 32.1864 & -8.1400 & 29.8036 & 64.4472 & -3.0456 \end{pmatrix}.$$

The estimations z_k are presented on pictures рис. 3 and 4 respectively.

14. Conclusions

In this paper, we have provided the technique of constructing the discrete-time observer-based compensator on the base of an original compensator. The additional Youla parameter was introduced for augmented-order compensator. Synthesis of the

Рис. 3. Estimation z_k

Рис. 4. Estimation z_k

reduced, full, and augmented-order compensator is based on finding the transformation matrix between the original compensator and the state-space of the plant. This transformation includes solution of the generalized non-symmetric Riccati equation. These results have been specialized to H_∞ or anisotropic based controllers, which are issued from augmented synthesis structure.

References

1. Alazard D., Apkarian P. Exact observer-based structures for arbitrary compensators. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 1999, no. 9, pp. 101–118.
2. Fowell R.A., Bender D.J., Assal A.F. Estimating the plant state from the compensator state. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1986, vol. AC-31, no. 10, pp. 964–967.
3. Luenberger D.G. An introduction to observers. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1971, vol. AC16, no. 6, pp. 596–602.
4. Narasimhamurthi N., Wu F.F. On the Riccati equation arising from the study of singularly perturbed systems // *Proc. of the IEEE Joint Automatic Control Conference*. New-York: IEEE, 1977.
5. Golub G.H., van Loan C.F. *Matrix — Computations*. 3rd ed. Baltimore: The John Hopkins University Press, 1996. (Ser. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences).