Количество точек, движущихся по метрическому графу: зависимость от перестановки ребер

12, ноябрь 2012

DOI: 10.7463/0113.0515440

Чернышев В. Л., Толченников А. А.

УДК 519.173+517.938+517.955.8

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
vchern@bmstu.ru

1. Введение

Рассмотрим конечный метрический граф (ребра такого графа представляют собой регулярные гладкие кривые с конечными длинами, см., например, [1]) и следующую динамическую систему на нем. Пусть в начальный момент времени по графу движется одна точка. Во внутренних вершинах графа она может делиться следующим образом: если в вершину валентности v пришло одновременно k точек, то выйдет по одной точке по всем ребрам. В вершинах валентности один происходит отражение. Время прохождения точками каждого отдельного ребра фиксировано. Предполагается, что на ребрах нет точек поворота. Задача состоит в анализе асимптотики числа таких точек на графе с увеличением времени. Приведенная дискретная формулировка появилась в результате отбрасывания лишних для этой статьи деталей, возникающих при анализе квазиклассических решений уравнения Шрёдингера, в частности, изучения поведения гауссовых пакетов на метрическом графе (см. статью [3] и ссылки в ней).

Дифференциальные уравнения и анализ на метрических графах продолжают вызывать большой интерес у математиков и физиков. Заинтересованным читателям можно рекомендовать новую книгу [1] и книгу, вышедшую 2004-м году [2], и ссылки в них. Квантовой механикой на графах занимается сейчас целый ряд специалистов, см., например, статьи [8], [9]. Все необходимые определения, связанные с изучением статистики гауссовых пакетов на метрическом графе, читатель может найти в статьях [3, 4, 5].

В [3] было показано, что старший коэффициент асимптотики числа движущихся точек при увеличении времени на конечном компактном метрическом графе для почти всех несоизмеримых времен прохождения ребер определяется только числом ребер, числом вершин графа, суммой и произведением времен прохождения всех ребер. Естественным образом

возникает вопрос о том, какими характеристиками будут определяться следующие члены асимптотического разложения. Получение явных формул в общем случае невозможно, но для почти всех времен прохождения ребер это можно осуществить, если построить асимптотическое разложение для числа целых точек в расширяющемся симплексе размерности выше трех. Обзор результатов, связанных с этой известной задачей, можно найти в [6]. В данной статье мы переходим к дискретной формулировке и показываем, как можно для конечного графа-дерева свести задачу нахождения числа движущихся точек к этой теоретико-числовой проблеме. Для этого мы выписываем точную формулу для числа точек, выразив его через число целых неотрицательных решений нестрогих неравенств, которые с геометрической точки зрения соответствуют симплексам. При этом в выкладках появляется функция, которую можно связать с функцией Шпрага-Гранди (см., например, [10]), для некоторой игры.

Обратив внимание на то, что поправки к асимптотическому разложению числа целых точек в симплексе симметрично входят в асимптотическое разложение числа движущихся точек, мы можем рассмотреть разность числа точек для двух графов, у которых одинаковое число вершин и множества времен прохождения ребер совпадают. Реализуем этот подход для графа-дерева Γ_L , с пятью ребрами и шестью вершинами, из которых две внутренних и четыре валентности один. Рассмотрим два варианта сборки Γ_L из одинакового набора ребер. Показано, что разность числа движущихся точек имеет порядок T^3 и старший коэффициент разности числа точек явным образом выражается через времена прохождения всех ребер, кроме перемычки. Оказывается, что второй член асимптотики числа точек зависит от того, где именно взяты начальные данные, поэтому можно рассмотреть симметрическую разность числа движущихся точек по всем возможным парам внутренних вершин. Оказывается, что она имеет порядок T^2 и старший коэффициент явно выписывается.

Совместно с О. В. Соболевым был проведен компьютерный эксперимент, в котором выражения, полученные в разделе 3, вычислялись непосредственно. Результаты совпали с полученными аналитически.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов: РФФИ 12-01-31235, 12-07-00267, МК-4255.2012.1, а также программ “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (госконтракты 14.740.11.0794 и 14.B37.21.0370).

Авторы благодарят А. Э. Эстерова, М. М. Скриганова, О. В. Соболева, Н. Г. Мошечкина, О. Н. Германа, А. В. Горбунова, С. Ю. Доброхотова и А. И. Шафаревича за полезные обсуждения и внимание к работе.

2. Переход к совокупности нестрогих неравенств

Введем следующие обозначения. Пусть $E(\Gamma) = \{e_i\}_{i=1}^E$ — множество ребер графа Γ . Времена прохождения точки по ребрам $E(\Gamma)$ равны соответственно $\{t_i\}_{i=1}^E$. При этом везде далее предполагается, что $\{t_i\}_{i=1}^E$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Пусть есть дерево Γ с корнем A , из которого в нулевой момент времени вышла точка. Напомним как устроена динамика на графе. В начальный момент времени по графу движется одна точка. Во внутренних вершинах графа она может делиться следующим образом: если в вершину валентности v пришло одновременно k точек, то выйдет по одной точке по всем ребрам. В вершинах валентности один происходит отражение. Время прохождения точками каждого отдельного ребра фиксировано. Предполагается, что на ребрах нет точек поворота.

Надо найти количество точек, движущихся по графу Γ , к моменту времени T . Для этого мы найдем времена, в которые образовывались новые точки, а затем просуммируем количество новых точек по этим временам. Найдем, например, количество новых точек, образовавшихся в той вершине A , из которой точка выходила при $T = 0$. Каждому моменту времени, в который рождалась новая точка, соответствует поддерево с корнем A . Это поддерево состоит из тех ребер $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_l}\}$, по которым прошла точка, прежде чем вернуться в A . А каждому поддереву соответствует множество времен вида $\{2t_{i_1}n_{i_1} + \dots + 2t_{i_l}n_{i_l}\}$ (по ребру e_i точка прошла $2n_i$ раз). Чтобы найти количество таких времен, меньших T , надо найти количество целочисленных точек в симплексе

$$\{2t_{i_1}n_{i_1} + \dots + 2t_{i_l}n_{i_l} \leq T, n_i > 0\}.$$

Например, для графа Γ_L из раздела 3 будет 10 поддеревьев с одним корнем и 10 поддеревьев с другим корнем. Таким образом, количество точек можно представить в виде суммы с некоторыми коэффициентами количества целочисленных точек в 20-ти расширяющихся симплексах. Однако, если мы перейдем к чуть большим симплексам и разрешим координатам быть нулевыми, то таких симплексов будет меньше: 11 вместо 20. В этом разделе мы предъявим формулу для количества точек, родившихся в вершине A , причем все симплексы в этой формуле будут задаваться нестрогими неравенствами.

Везде далее n_i — целые неотрицательные числа. Для системы неравенств Γ , связывающих набор чисел n_i , через $\#[\Gamma]$ обозначим количество решений этой системы.

Следующее утверждение доказывается по индукции.

Утверждение 1. Справедливо следующее соотношение:

$$[n_1t_1 + \dots + n_kt_k \leq T, n_i > 0 \forall i = 1, \dots, k] = \sum_{s=0}^k (-1)^{(k-s)} \sum_{\{i_1, \dots, i_s\} \subset \{1, \dots, k\}} [n_{i_1}t_{i_1} + \dots + n_{i_s}t_{i_s} \leq T, n_{i_j} \geq 0 \forall j = 1, \dots, s].$$

Обозначим $N(\Gamma, A, X, T)$ — количество новых точек, родившихся в вершине $X \in \Gamma$ к моменту времени T , при условии, что в начальный момент времени точка вышла из вершины $A \in \Gamma$. Пусть вершине A инцидентны ребра $e_1, \dots, e_{\deg(A)}$, где $\deg(A)$ — валентность A . Обозначим Γ_{e_i} максимальное из поддеревьев, не содержащих ребра $e_j, j \neq i$. Тогда $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\deg(A)} \Gamma_{e_i}$. Через $|\Gamma|$ обозначим количество ребер графа Γ , т.е. $|E(\Gamma)|$.

Введем следующие обозначения:

$$z(\Gamma, G, A) = (-1)^{|G|} \sum_{\Gamma' \subseteq \Gamma \text{ т.ч. } G \subseteq E(\Gamma')} (-1)^{|\Gamma'|};$$

$$z_i(\Gamma, A) = z(\Gamma_{e_i}, \emptyset, A), 1 \leq i \leq \deg(A).$$

Для $G = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ также обозначим

$$\#[G] = [2n_{i_1}t_{i_1} + \dots + 2n_{i_k}t_{i_k} \leq T, n_i \geq 0].$$

Определим величину c_G следующим образом. Перенумеруем ребра, инцидентные A , так, что G пересекаются только с $E(\Gamma_{e_1}), \dots, E(\Gamma_{e_k})$ ($\deg(A) = n \geq k$). Тогда

$$c_G = \prod_{i=1}^k z(\Gamma_{e_i}, G, A) \left[\sum_{j=0}^{n-k-1} (n-k-j) \sigma_j(z_{k+1}, \dots, z_n) \right],$$

где σ_j — элементарные симметрические функции, $z_i = z_i(\Gamma, A)$.

Теорема 1. Справедливо следующее соотношение:

$$N(\Gamma, A, A, T) = \sum_{G \subseteq E(\Gamma)} c_G \#[G].$$

Доказательство. Рассмотрим для начала дерево Γ_{e_1} такое, что из корня выходит только одно ребро e_1 . Найдем $F(\Gamma_{e_1}, A, T)$ — количество времен, меньших T , в которые точка возвращается в корень A . Каждому такому времени соответствует дерево с ребрами, по которым проходил маршрут точки. Обратно, поддереву $\Gamma' \subset \Gamma_{e_1}$ с ребрами $e_1, e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}$ соответствует множество времен $\{2n_1t_1 + 2n_{i_1}t_{i_1} + \dots + 2n_{i_{k-1}}t_{i_{k-1}}\}$ (здесь $n_1, n_{i_1}, \dots, n_{i_{k-1}} > 0$).

Используя утверждение 1, получаем:

$$F(\Gamma_{e_1}, A, T) = \sum_{\Gamma' \subseteq \Gamma_{e_1}} \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} \sum_{j_1, \dots, j_s \in \{1, i_1, \dots, i_{k-1}\}} \#[2n_{j_1}t_{j_1} + \dots + 2n_{j_s}t_{j_s} \leq T, n_j \geq 0].$$

Поменяв местами суммирования, можно правую часть переписать в виде суммы по всем подмножествам ребер $G \subset \{e_1, \dots, e_{E(\Gamma_{e_1})}\}$:

$$F(\Gamma_{e_1}, A, T) = \sum_{G \subseteq \{e_1, \dots, e_{E(\Gamma_{e_1})}\}} \#[G] z(\Gamma_{e_1}, G, A).$$

Пусть теперь вершине A инцидентно два ребра e_1, e_2 . $\Gamma = \Gamma_{e_1} \cup \Gamma_{e_2}$. Тогда аналогично

$$F(\Gamma, A, T) = \sum_{G \subseteq \{e_1, \dots, e_{E(\Gamma)}\}} \#[G] (-1)^{|G|} \sum_{\Gamma' \subseteq \Gamma \text{ т.ч. } G \subseteq E(\Gamma')} (-1)^{|\Gamma'|}.$$

Разобьем $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 = E(\Gamma_{e_1}) \cap G$, $G_2 = E(\Gamma_{e_2}) \cap G$, тогда последняя формула будет иметь вид:

$$\begin{aligned} F(\Gamma, A, T) &= \\ &= \sum_{G_1 \subseteq E(\Gamma_{e_1}), G_2 \subseteq E(\Gamma_{e_2})} [G_1 \cup G_2] (-1)^{|G_1|+|G_2|} \sum_{\substack{\Gamma' \subseteq \Gamma_{e_1}, \Gamma'' \subseteq \Gamma_{e_2} \text{ т.ч. } G_1 \subseteq E(\Gamma'), G_2 \subseteq E(\Gamma'')}} (-1)^{|\Gamma'|+|\Gamma''|} = \\ &= \sum_{G_1 \subseteq E(\Gamma_{e_1}), G_2 \subseteq E(\Gamma_{e_2})} [G_1 \cup G_2] z(\Gamma_{e_1}, G_1, A) z(\Gamma_{e_2}, G_2, A). \end{aligned}$$

Пусть теперь из вершины A графа $\Gamma = \Gamma_{e_1, \dots, e_n}$ выходят n ребер $e_1, \dots, e_n$: $\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma_{e_i}$. Тогда

$$N(\Gamma, A, A, T) = \sum_{s=1}^{n-1} (n-s) \sum_{\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}} F(\cup_{j=1}^s \Gamma_{e_{i_j}}, A, T).$$

Эта формула выводится из следующих соображений. Пусть про точку, которая вернулась в момент времени t в вершину A , известно, что она прошла по s ребрам вида $e_1, \dots, e_n$. Тогда в момент t образуется $n-s$ новых точек. А внутренняя сумма представляет собой количество моментов времени такого вида.

В этой сумме нам надо собрать коэффициенты при одинаковых функциях вида $\#[G]$.

Пусть, например, $G \subseteq E(\Gamma_{e_1})$, тогда коэффициент при $\#[G]$ равен

$$\begin{aligned} &(n-1)z(\Gamma_{e_1}, G, A) + (n-2)z(\Gamma_{e_1}, G, A) (z(\Gamma_{e_2}, \emptyset, A) + \dots + z(\Gamma_{e_n}, \emptyset, A)) + \\ &\quad + (n-3)z(\Gamma_{e_1}, G, A) (z(\Gamma_{e_2}, \emptyset, A)z(\Gamma_{e_3}, \emptyset, A) + \dots) + \dots = \\ &= z(\Gamma_{e_1}, G, A) (n-1 + (n-2)\sigma_1(z_2, \dots, z_n) + (n-3)\sigma_2(z_2, \dots, z_n) + \dots) = c_G. \end{aligned}$$

Аналогично получаем доказательство в общем случае.

Заметим, что функцию $z(\Gamma, \emptyset, A)$ можно вычислять рекуррентно. Рассмотрим

$$z^0(\Gamma, A) = \sum_{\Gamma' \subseteq \Gamma, A \in \Gamma'} (-1)^{|\Gamma'|} + 1 = z(\Gamma, \emptyset, A) + 1,$$

т.е. добавим слагаемое, соответствующее Γ' , состоящему только из одной вершины. Тогда:

1) если деревья Γ_1 и Γ_2 пересекаются по одной вершине A , то

$$z^0(\Gamma_1 \cup \Gamma_2, A) = z^0(\Gamma_1, A) z^0(\Gamma_2, A);$$

2) если из вершины A графа Γ_1 выходит только одно ребро (A, B) и $\Gamma_2 = \Gamma_1 \setminus (A, B)$, то

$$z^0(\Gamma_1, A) = 1 - z^0(\Gamma_2, B).$$

Заметим, что функцию z_A^0 можно интерпретировать как отрицание функции Шпрага-Гранди (см., например, [10]) для некоторой игры, приведенной ниже. Рассмотрим двух игроков, перемещающихся по дереву вниз от корня и делающих ходы по очереди. Целью

игры является сделать ход последним (попасть в вершину валентности один). Стратегия выигрыша: переходить в вершины, помеченные 1. Первый игрок выигрывает при правильной игре тогда и только тогда, когда корень помечен 0. Из вершин, помеченных 1, можно попасть только в 0. Из вершин, помеченных 0, всегда есть возможность перейти в 1. Поэтому инициатива всегда на стороне игрока, находящегося в вершине, помеченной 0, и он имеет возможность сделать последний ход (то есть попасть в вершину валентности один).

3. Результаты для графа Γ_L

Рассмотрим граф Γ_L , состоящий из ребер e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 , времена прохождения по которым равны t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 соответственно, и все t_i линейно независимы над $\mathbb{Q}$. В графе только две вершины степени 3: A , в которой сходятся e_1, e_2, e_3 , и B , в которой сходятся e_3, e_4, e_5 (рис. 1).

Рис. 1. Граф Γ_L с движущейся на нем точкой

Везде далее в неравенствах, если не оговаривается специально, n_i — неотрицательные целые числа.

Утверждение 2. Выполнено следующее соотношение:

$$\begin{aligned} N(\Gamma_L, A, A, T) = & \#[2n_1t_1 + 2n_3t_3 + 2n_4t_4 + 2n_5t_5 \leq T] + \#[2n_2t_2 + 2n_3t_3 + 2n_4t_4 + 2n_5t_5 \leq T] - \\ & - \#[2n_1t_1 + 2n_4t_4 + 2n_5t_5 \leq T] - \#[2n_2t_2 + 2n_4t_4 + 2n_5t_5 \leq T] + \#[2n_1t_1 + 2n_2t_2 \leq T] + \\ & + \#[2n_1t_1 \leq T] + \#[2n_2t_2 \leq T] + \text{const.} \end{aligned}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\begin{aligned} z_1(\Gamma_L, A) &= z_2(\Gamma_L, A) = -1, z_3(\Gamma_L, A) = 0, \\ z(\Gamma_{e_1}, \{e_1\}, A) &= z(\Gamma_{e_2}, \{e_2\}, A) = 1, \\ z(\Gamma_{e_3}, \{e_3\}, A) &= 0, \\ z(\Gamma_{e_3}, \{e_3, e_4\}, A) &= z(\Gamma_{e_3}, \{e_3, e_5\}, A) = 0, \\ z(\Gamma_{e_3}, \{e_4, e_5\}, A) &= -1, \\ z(\Gamma_{e_3}, \{e_3, e_4, e_5\}, A) &= 1, \end{aligned}$$

вычисляем коэффициенты непосредственно по формуле из утверждения 1.

Утверждение 3. Выполнено следующее соотношение:

$$\begin{aligned} N(\Gamma, A, B, T) = & \#[2n_1t_1 + 2n_2t_2 + 2n_3t_3 + 2n_4t_4 \leq T - t_3] + \\ & + \#[2n_1t_1 + 2n_2t_2 + 2n_3t_3 + 2n_5t_5 \leq T - t_3] + \\ & + \#[2n_1t_1 + 2n_2t_2 + 2n_4t_4 + 2n_5t_5 \leq T - t_3] - \#[2n_1t_1 + 2n_2t_2 \leq T - t_3]. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи:

- 1) $n_3 > 1$;
- 2) $n_3 = 1$, $n_1 = n_2 = 0$ и $n_4 + n_5 \neq 0$;
- 3) $n_3 = 1$ и $n_1 + n_2 \neq 0$.

Сумма времен из 1 и 2 дают $N(\Gamma, B, B, (T - t_3))$ (выражение, получаемое из $N(\Gamma, A, A, T)$ заменой e_1 на e_4 , e_2 на e_5 , T на $T - t_3$).

Случай 3 дает

$$\begin{aligned} & 2\#[2n_1t_1 + 2n_2t_2 \leq T - t_3] + 2\#[2n_1t_1 + 2n_2t_2 + 2n_4t_4 \leq T - t_3, n_4 > 0, n_1 + n_2 > 0] + \\ & + 2\#[2n_1t_1 + 2n_2t_2 + 2n_5t_5 \leq T - t_3, n_5 > 0, n_1 + n_2 > 0] + \\ & + \#[2n_1t_1 + 2n_2t_2 + 2n_4t_4 + 2n_5t_5 \leq T - t_3, n_4 > 0, n_5 > 0, n_1 + n_2 > 0]. \end{aligned}$$

Складывая эти функции, получаем $N(\Gamma, A, B, T)$.

Найдем выражение для $N(\Gamma_L, A, T)$ — общего количества точек на графе Γ_L к моменту времени T при условии, что в начальный момент точка вышла из вершины A . Очевидно, что $N(\Gamma_L, A, T) = N(\Gamma_L, A, A, T) + N(\Gamma_L, A, B, T)$.

Предположение 1. Числа $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Для всех $1 \leq m \leq 4$ и всех m -элементных подмножеств $\{s_{i_1}, \dots, s_{i_m}\} \subset \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ имеет место соотношение

$$\#[s_{i_1}n_{i_1} + \dots + s_{i_m}n_{i_m} \leq T] = P_m(s_{i_1}, \dots, s_{i_m})T^4 + R_m(s_{i_1}, \dots, s_{i_m})T^3 + o(T^3).$$

Из работы [7] следует, что предположение 1 выполнено для почти всех $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, однако строгого доказательства этого утверждения пока нет.

Утверждение 4. Если времена $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ удовлетворяют предположению 1, то имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{а) } N(\Gamma_L, A, A, T) = & \frac{1}{4!2^4} \left(\frac{1}{t_2t_3t_4t_5} + \frac{1}{t_1t_3t_4t_5} \right) T^4 + \\ & \left(R_4(2t_2, 2t_3, 2t_4, 2t_5) + R_4(2t_1, 2t_3, 2t_4, 2t_5) - \frac{1}{48t_2t_4t_5} - \frac{1}{48t_1t_4t_5} \right) T^3 + o(T^3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } N(\Gamma_L, A, B, T) = & \frac{1}{4!2^4} \left(\frac{1}{t_1 t_2 t_4 t_5} + \frac{1}{t_1 t_2 t_3 t_5} + \frac{1}{t_1 t_2 t_3 t_4} \right) T^4 + \\ & + \left(R_4(2t_1, 2t_2, 2t_4, 2t_5) + R_4(2t_1, 2t_2, 2t_3, 2t_5) + R_4(2t_1, 2t_2, 2t_3, 2t_4) - \right. \\ & \left. - \frac{t_3}{96 t_1 t_2 t_4 t_5} - \frac{1}{96 t_1 t_2 t_5} - \frac{1}{96 t_1 t_2 t_4} \right) T^3 + o(T^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } N(\Gamma_L, A, T) = & \frac{1}{4!2^4} \left(\sum_{\{s_1, s_2, s_3, s_4\} \subset \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}} \frac{1}{s_1 s_2 s_3 s_4} \right) + \\ & + \left(\sum_{\{s_1, s_2, s_3, s_4\} \subset \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}} R(2s_1, 2s_2, 2s_3, 2s_4) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{96} \left(\frac{2}{t_2 t_4 t_5} + \frac{2}{t_1 t_4 t_5} + \frac{t_3}{t_1 t_2 t_4 t_5} + \frac{1}{t_1 t_2 t_4} + \frac{1}{t_1 t_2 t_5} \right) \right) T^3 + o(T^3). \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем получить старший коэффициент для разности числа точек на графах, полученных друг из друга перестановкой ребер. Например, если Γ'_L получен из Γ_L перестановкой e_1 и e_5 , то справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. Для времен $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, удовлетворяющих предположению 1, выполнено:

$$N(\Gamma_L, A, T) - N(\Gamma'_L, A, T) = -\frac{1}{96 t_2 t_4} \left(\frac{1}{t_5} - \frac{1}{t_1} \right) T^3 + o(T^3).$$

4. Симметрическая разность

Предположение 2. Числа $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Для всех $1 \leq m \leq 4$ и всех m -элементных подмножеств $\{s_{i_1}, \dots, s_{i_m}\} \subset \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \#[s_{i_1} n_{i_1} + \dots + s_{i_m} n_{i_m} \leq T] = \\ = P_m(s_{i_1}, \dots, s_{i_m}) T^4 + R_m(s_{i_1}, \dots, s_{i_m}) T^3 + K_m(s_{i_1}, \dots, s_{i_m}) T^2 + o(T^2). \end{aligned}$$

Обозначим внутренние вершины одного варианта сборки Γ_L как A и B , а второго — как X и Y (рис. 2). Поскольку второй член асимптотики числа точек зависит от начального положения точки, мы можем рассмотреть разные варианты разностей числа точек, в зависимости

Рис. 2. Два варианта сборки графа Γ_L в один и тот же момент времени

от того, какие две вершины фиксированы. Чтобы избавиться от произвола в выборе пар, возьмем сумму разностей числа точек по всем возможным перестановкам. Оказывается, что такая симметрическая разность имеет порядок не T^3 , а T^2 . Точнее, справедливо следующее предложение.

Утверждение 6. Обозначим через $d(A, X)$ разность числа точек выпущенных из вершины A на первом графе и вершины X на втором. Для времен $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$, удовлетворяющих предположению 2, выполнено:

$$d(A, X) + d(A, Y) + d(B, X) + d(B, Y) = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{t_1 t_2} + \frac{1}{t_4 t_5} - \frac{1}{t_2 t_4} - \frac{1}{t_1 t_5} \right) T^2 + o(T^2).$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущих утверждений и сводится к рассмотрению системы нестрогих неравенств.

Был проведен компьютерный эксперимент, в котором выражения, указанные в утверждениях 5 и 6, были обнаружены непосредственным вычислением. Был взят граф Γ_L с длинами ребер $t_1 = 1$, $t_2 = \sqrt{2}$, $t_3 = \sqrt{3}$, $t_4 = \sqrt{5}$, $t_5 = \sqrt{7}$. Точки в начальной момент выходили из одной из двух внутренних вершин. Результаты эксперимента совпали с результатами, полученными аналитически. Компьютерный эксперимент был проведен совместно с О. В. Соболевым.

Список литературы

1. Kuchment P., Berkolaiko G. Introduction to Quantum Graphs. AMS, 2013. 270 p. (Mathematical Surveys and Monographs, vol. 186.)
2. Покорный Ю.В. [и др]. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. М.: Физматлит, 2004. 272 с.
3. Чернышев В.Л. Нестационарное уравнение Шрёдингера: статистика распространения гауссовых пакетов на геометрическом графе // Труды Математического Института им. В.А. Стеклова. 2010. Т. 270. С. 249–265.
4. Чернышев В.Л., Толченников А.А. Свойства распределения гауссовых пакетов на пространственной сети // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 10. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/239866.html> (дата обращения: 12.12.2012).
5. Толченников А.А., Чернышев В.Л., Шафаревич А.И. Асимптотические свойства и классические динамические системы в квантовых задачах на сингулярных пространствах // Нелинейная динамика. 2010, Т. 6, №. 3, С. 623–638.
6. Stephen S.-T. Yau, Linda Zhao, Huaqing Zuo. Biggest sharp polynomial estimate of integral points in right-angled simplices // In: Topology of algebraic varieties and singularities. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011. P. 433-467.

7. Skriganov M.M. Ergodic theory on $SL(n)$, Diophantine approximations and anomalies in the lattice point problem // *Invent. Math.* 1998. Vol. 132, no. 1. P. 1–72.
8. Harrison J.M., Keating J.P., Robbins J.M. Quantum Statistics on Graphs // *Proceedings of the Royal Society A — Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2011. Vol. 467, iss. 2125. P. 212–233.
9. Adami R., Cacciapuoti C., Finco D., Noja D. On the structure of critical energy levels for the cubic focusing NLS on star graphs // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2012. Vol. 45, no. 19. DOI: 10.1088/1751-8113/45/19/192001.
10. Schleicher D., Stoll M. An introduction to Conway's games and numbers. 30 Sep. 2005. Available at: [arXiv:math/0410026](https://arxiv.org/abs/math/0410026), accessed 12.12.2012.

The number of points moving on a metric graph: dependence on the permutation of edges

12, November 2012

DOI: 10.7463/0113.0515440

Chernyshev V. L., Tolchennikov A. A.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

vchern@bmstu.ru

Moving of points on a metric graph associated with the problem of dynamics and statistics of Gaussian packets on a spatial network is under consideration. For an arbitrary tree graph we obtain a representation for the number of points arising from the initial vertex. For a certain graph we find the number of moving points on the graph as the sum of the number of solutions of linear inequalities. We find the first term of the difference of numbers of points moving on two graphs, obtained by permutation of edges. Also we find the leading term for a symmetrical difference of the number of moving points.

References

1. Kuchment P., Berkolaiko G. *Introduction to Quantum Graphs*. AMS, 2013. 270 p. (*Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 186.)
2. Pokornyi Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L., Borovskikh A.V., Lazarev K.P., Shabrov S.A. *Differentsial'nye uravneniia na geometricheskikh grafakh* [Differential equations on geometrical graphs]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 272 p.
3. Chernyshev V.L. Nestatsionarnoe uravnenie Shredingera: statistika rasprostraneniia gaussovykh paketov na geometricheskom grafe [Time-dependent Schroedinger equation: statistics of the distribution of Gaussian packets on a metric graph]. *Trudy Matematicheskogo Instituta im. V.A. Steklova* [Proc. Steklov Inst. Math.], 2010, vol. 270, pp. 249–265.
4. Chernyshev V.L., Tolchennikov A.A. Svoistva raspredeleniia gaussovykh paketov na prostanstvennoi seti [The properties of the distribution of Gaussian packets on a spatial network]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 10. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/239866.html>, accessed 12.12.2012.
5. Tolchennikov A.A., Chernyshev V.L., Shafarevich A.I. Asimptoticheskie svoistva i klassicheskie dinamicheskie sistemy v kvantovykh zadachakh na singuliarnykh prostranstvakh

- [Asymptotic properties of the classical dynamical systems in quantum problems on singular spaces]. *Nelineinaia dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2010, vol. 6, no. 3, pp. 623–638.
6. Stephen S.-T. Yau, Linda Zhao, Huaqing Zuo. Biggest sharp polynomial estimate of integral points in right-angled simplices. In: *Topology of algebraic varieties and singularities*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 433–467.
 7. Skriganov M.M. Ergodic theory on $SL(n)$, Diophantine approximations and anomalies in the lattice point problem. *Invent. Math.*, 1998, vol. 132, no. 1, pp. 1–72.
 8. Harrison J.M., Keating J.P., Robbins J.M. Quantum Statistics on Graphs. *Proc. of the Royal Society A — Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2011, vol. 467, iss. 2125, pp. 212–233.
 9. Adami R., Cacciapuoti C., Finco D., Noja D. On the structure of critical energy levels for the cubic focusing NLS on star graphs. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2012, vol. 45, no. 19. DOI: 10.1088/1751-8113/45/19/192001.
 10. Schleicher D., Stoll M. *An introduction to Conway's games and numbers*. 30 Sep. 2005. Available at: [arXiv:math/0410026](https://arxiv.org/abs/math/0410026), accessed 12.12.2012.