Разработка матричного метода описания геометрии и расчета аэродинамических характеристик тел с произвольно искривленной осью

11, ноябрь 2012

DOI: 10.7463/1112.0492155

Романова И. К., Соловьев В. С.

УДК 623.5 (533.696.3)

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

romanova@sm.bmstu.ru

sm4@sm.bmstu.ru

Рассмотрим класс летательных аппаратов, с необратимыми деформациями корпуса в виде произвольно искривленной оси. Актуальной является задача разработки методики расчета аэродинамических коэффициентов таких тел.

Одной из главных компонент аэродинамических нагрузок является составляющая, обусловленная действием сил давления (см. [1]). Ряд приближенных методов ее определения, о которых говорилось в данной статье, оказался по тем или иным причинам непригодным для исследуемого класса тел - искривленных, с большими величинами деформаций. Так, форма исследуемого объекта не позволяет применять в полной мере методы касательных конусов, а точность метода течений разрежения - скачков уплотнения ухудшается с ростом углов атаки, ибо при этом начинает сказываться влияние вязкости, отрывных течений, а также ухудшение использования предположения о плоских течениях в каждой меридиональной плоскости.

В результате анализа существующих методов, проведенной в [1] за основу была взята гипотеза "ньютонова торможения". Она обычно применяется для приближенного расчета давления при больших скоростях обтекания. Согласно корпускулярной теории Ньютона частицы газа испытывают возмущения только при ударе о твердую стенку и полностью теряют нормальную к стенке составляющую количества движения. С физической точки зрения при обтекании тела с большой сверхзвуковой скоростью предположение Ньютона становится справедливым [2], так как в этом случае ударная волна располагается близко к поверхности тела и все струйки до ударной волны имеют

одинаковые направления и величину скорости невозмущенного потока, а за ударной волной движутся в тонком слое между нею и телом и приобретают почти одинаковые скорости, параллельные его поверхности. Чем больше число Маха и тоньше тело, тем ближе к действительности теория Ньютона. Указанная причина объясняет достаточно хорошую сходимость расчета и реального распределения давления, увеличивающуюся по мере роста числа Маха и практический расчет дает во многих случаях удовлетворительные результаты, несмотря на то, что влияние вязкости в теории Ньютона не учитывается. Для повышения точности расчетов в общепринятую формулу, выражающую давление через квадрат синуса угла наклона тела без поправки на центробежные силы, вводится некоторый множитель, учитывающий точное значение давления торможения» Предложенная Лизом формула носит название ньютоновой модифицированной и носит эмпирический характер.

Пределы применения теории с учетом различных модификаций даже в случае исследования нестационарного обтекания (γ - коррекция) могут быть расширены до 2-3, причем, как показано в [1] (сравнение с теорией поперечного обтекания), теория может применяться и при больших отклонениях потока. Взятая за основную физическую гипотезу при разработке методики определения стационарных и нестационарных характеристик - составляющих от распределения сил давления гипотеза ньютонова торможения была в [1] проверена экспериментально для исследуемых искривленных тел путем сравнения с расчетными зависимостями значений коэффициентов давления на поверхности тела и суммарных аэродинамических и была подтверждена возможность ее применения.

В соответствии с указанной гипотезой распределение давления на теле определяется по формуле через коэффициент давления:

$$\bar{p} = (p - p_{\infty}) / q_{\infty} = 2 \cos^2 \eta$$

$$q_{\infty} = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2$$
(1)

где η - угол между направлением набегающего потока и нормалью к поверхности тела, индекс ∞ относится к параметрам набегающего потока; V_{∞} - скорость набегающего потока (модуль), ρ - плотность, q_{∞} - скоростной напор.

Рассматриваются две составляющие вектора скорости набегающего потока: от поступательного движения $\vec{V}$ и от вращательного движения вокруг центра масс со

скоростью $\vec{\omega} : -\vec{V}_{\omega}$. Тогда коэффициент давления будет состоять из двух членов, определяемых нормальными частями указанных составляющих, так что (1) запишется в виде:

$$\bar{p} = 2(V_{отн} / V_{\infty})^2 = (2 / V_{\infty}^2)(V_{n\infty} + V_{n\omega})^2 \quad (2)$$

где индекс "отн." определяет относительную скорость частицы газа, равную переносной скорости точки тела, в которой определяется давление, взятой с обратным знаком. Основной задачей, как следует из формул для коэффициента давления, является определение нормали к поверхности, тогда можно определить и составляющие нормальной скорости, а значит, и коэффициент $\bar{p}$.

Приведем общие соотношения для скоростей, давлений, сил и моментов.

Нормальные составляющие скоростей получаются скалярным перемножением вектора соответствующей скорости на вектор единичной нормали:

$$V_{n\infty} = \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{N} = V_{x\infty}N_x + V_{y\infty}N_y + V_{z\infty}N_z \quad (3)$$

где $V_{x\infty}, V_{y\infty}, V_{z\infty}$ - компоненты вектора поточной скорости в некоторой системе XYZ ;

N_x, N_y, N_z - компоненты вектора единичной нормали к поверхности в той же системе.

Заметим, что в связанной обращенной системы координат (в дальнейшем обозначим $X''Y''Z''$) для представления компонент вектора скорости набегающего потока через углы атаки α и скольжения β известные формулы:

$$\vec{V}_{\infty} = |\vec{V}_{\infty}| \cdot (\cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} + \sin \beta \cdot \vec{k}) \quad (4)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные орты системы $X''Y''Z''$. Угловая скорость вращательного движения:

$$\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k}$$

Добавочная скорость обращенного движения, индуцируемая в рассматриваемой точке А, равна векторному произведению:

$$\vec{V}_{\omega} = -\vec{\omega} \times \vec{R}_A \quad (5)$$

Нормальная составляющая этой скорости определяется как скалярное произведение вектора (5) на вектор нормали:

$$V_{n\omega} = V_{\omega x}N_x + V_{\omega y}N_y + V_{\omega z}N_z$$

где компоненты скорости получаются из раскрытия векторного произведения.

Заметим, что начало координат используемой системы может не совпадать с центром масс тела, относительно которого осуществляется вращение. Рассмотрим некоторую точку А, принадлежащую деформированному телу, с радиусом-вектором от начала координат до этой точки $\vec{R}$ и точку центра масс тела с радиусом $\vec{R}_T$. Тогда вектор, соединяющий точки А и центра масс и направленный к точке А, обозначим $\vec{R}_A$, и подставим в вышеприведенную формулу:

$$\vec{R}_A = \vec{R} - \vec{R}_T = \Delta x_A \cdot \vec{i} + \Delta y_A \cdot \vec{j} + \Delta z_A \cdot \vec{k} \quad (6)$$

Для определения аэродинамических коэффициентов рассмотрим силу, действующую на элемент поверхности и порождаемую нормальным давлением:

$$d\vec{F} = \bar{p}q dS \cdot \vec{N} = \left| d\vec{F} \right|_x \cdot \vec{i} + \left| d\vec{F} \right|_y \cdot \vec{j} + \left| d\vec{F} \right|_z \cdot \vec{k}$$

Выполняя интегрирование по поверхности для каждой из компонент и относя к характерной площади и скоростному напору согласно общим выражениям

$$X_a = qSC_{xa}; Y_a = qSC_{ya}; Z_a = qSC_{za}$$

имеем формулы для аэродинамических коэффициентов в некоторой системе координат XYZ:

$$\begin{aligned} C_{xa} &= X_a / (qS) = 1/(qS) \int_{(S)} \bar{p}q N_x dS; \\ C_{ya} &= Y_a / (qS) = 1/(qS) \int_{(S)} \bar{p}q N_y dS; \\ C_{za} &= Z_a / (qS) = 1/(qS) \int_{(S)} \bar{p}q N_z dS; \end{aligned} \quad (7)$$

где N_x, N_y, N_z - проекции нормали на оси координат x,y,z;

$\bar{p}$ - местный коэффициент давления, действующий на данную площадку dS и рассчитываемый по формуле (2);

q - скоростной напор.

Момент силы $\vec{F}$ относительно центра О равен векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$, соединяющего этот центр с точкой приложения силы А на эту силу:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Рассматривая момент от элементарной силы $d\vec{F}$ и учитывая выражения компонент силы по осям координат, после раскрытия определителя формулы для M_o имеем:

$$d\vec{M} = \left(|d\vec{F}| N_z y - |d\vec{F}| N_y z \right) \cdot \vec{i} - \left(|d\vec{F}| N_z x - |d\vec{F}| N_x z \right) \cdot \vec{j} + \left(|d\vec{F}| N_y x - |d\vec{F}| N_x y \right) \cdot \vec{k}$$

где $|d\vec{F}| = \bar{p} q dS$.

Отсюда, используя формулы (3) имеем выражения для аэродинамических коэффициентов моментов:

$$\begin{aligned} m_x &= 1/(qSl) \int_{(S)} \bar{p} q (N_z y - N_y z) dS; \\ m_y &= 1/(qSl) \int_{(S)} \bar{p} q (N_x z - N_z x) dS \\ m_z &= 1/(qSl) \int_{(S)} \bar{p} q (N_y x - N_x y) dS \end{aligned} \quad (8)$$

Пределы интегрирования зависят в случае использования метода Ньютона от геометрии тела и параметров его движения. Чтобы установить их, надо исходить из особенностей обтекания тела "ньютоновым потоком": на его поверхности создается некоторая «затененная» зона, в которой не происходит удара частиц.

Граница этой области определяется кривой, на которой, как и всюду за ней, коэффициент давления равен нулю. Из выражения для коэффициента давления ясно, что уравнение границы:

$$V_n = 0 \quad (9)$$

откуда и определяют пределы интегрирования.

Очевидно, что важнейшей проблемой является оптимальное задание геометрии искривленного тела и определение основных геометрических соотношений и связи между используемыми системами координат.

Рассмотрим задачу в наиболее общей постановке. Пусть задано тело произвольной формы. Эту форму можно определить, задав некоторую ось тела, тогда в каждом сечении, перпендикулярном этой оси, точка поверхности определится с помощью

угла и радиуса - переменного по оси тела и в общем случае зависящего от этого угла. Тем самым мы используем так называемую цилиндрическую систему координат.

Предположим, что в результате деформаций сечения тела остались плоскими с теми же переменными радиусами, а ось его приобрела некоторую криволинейную пространственную форму. Геометрию нового деформированного тела наиболее удобно задать в криволинейной системе координат, задание которой естественно связать с положением в пространстве искривленной оси тела (рис. 1).

Рис 1. Криволинейная система координат для искривленного тела

Уравнение линии в пространстве задается векторным уравнением:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

где X, Y, Z - могут быть заданы как функции некоторого параметра t - например длины дуги s , так что

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \varphi(s) \cdot \vec{i} + \psi(s) \cdot \vec{j} + \chi(s) \cdot \vec{k} \quad (10)$$

Известно, что пространственная кривая имеет ряд важных геометрических характеристик, таких как: положение касательной, нормали и бинормали в данной точке кривой.

При параметрическом задании пространственной кривой имеем:

- 1) касательная к кривой - единичный вектор:

$$d\vec{r}/ds = (dx/ds) \cdot \vec{i} + (dy/ds) \cdot \vec{j} + (dz/ds) \cdot \vec{k} = \vec{\sigma} = \vec{i}' \quad (11)$$

- 2) единичный вектор главной нормали $\vec{n}$ кривой с радиусом кривизны R и кривизной $K = 1/R$:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (1/K)(d\vec{\sigma}/ds) = (1/K)(d^2\vec{r}/ds^2) = \\ &= (1/K) \left[(d^2x/ds^2) \cdot \vec{i} + (d^2y/ds^2) \cdot \vec{j} + (d^2z/ds^2) \cdot \vec{k} = -\vec{j}' \right] \end{aligned} \quad (12)$$

- 3) бинормаль для правой тройки орт

$$\vec{b} = \vec{\sigma} \times \vec{n} = -\vec{k}' \quad (13)$$

Эти вектора удобно брать в качестве орт криволинейной системы координат, направление которых в общем случае переменны по длине тела.

Перечислим системы координат, которыми будем далее пользоваться (рис. 2).

Рис. 2. Системы координат, используемые при выводе формул для искривленного тела.

Основная система координат $OXYZ$ - связанная. Своим началом имеет действительный центр масс тела или какую-либо другую точку (в этом случае осуществляется пересчет получаемых соотношений). Ее орты $\vec{i}_{np}, \vec{j}_{np}, \vec{k}_{np}$ ориентированы так, чтобы ось X была направлена к носку тела. Если тело имеет плоскость симметрии (в случае плоского искривления тела вращения), целесообразно в ней размещать оси $OXOY$. Используется также ряд вспомогательных систем координат. Система $O''X''O''Y''$ имеет следующие свойства: начало координат расположено в произвольной точке, определяемой удобствами получения геометрических, инерционных и аэродинамических соотношений, например, в точке, где находился центр масс тела до деформации, или в сечении торцов. Орты этой системы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ориентированы так, что $\vec{i} = -\vec{i}_{np}, \vec{j} = -\vec{j}_{np}, \vec{k} = -\vec{k}_{np}$. Система $O_1X_1Y_1Z_1$ является криволинейной. Ее начало - точка O_1 - совпадает с точкой O'' . Направления орт $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ переменны по длине и выбраны:

$\vec{i}' = \vec{\sigma}$ - по касательной к искривленной оси в данной точке;

$\vec{j}' = -\vec{n}$ - против главной нормали в данной точке;

$\vec{k}' = -\vec{b}$ - против бинормали (дополняет систему $\vec{i}', \vec{j}'$ до правой)

Тогда связь между ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ соответственно исходной ($O''X''O''Y''$) декартовой и криволинейной ($O_1X_1Y_1Z_1$) систем координат будет определяться соотношением:

$$[\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}']^T = A[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]^T \quad (14)$$

где A - переходная матрица:

$A(1,l)$ - первая строка матрицы - направляющие косинусы для касательной - коэффициенты при ортах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в выражении для $\vec{i}' = \vec{\sigma}$;

$A(2,l)$ - вторая строка матрицы - направляющие косинусы для противонормали - коэффициенты при ортах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в выражении для $\vec{j}' = -\vec{n}$;

$A(3,l)$ - третья строка матрицы - направляющие косинусы для противобинормали; $l = 1, 2, 3$.

При этом связь между компонентами в указанных системах координат $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ ($O''X''O''Y''$) и $[\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3]$ ($O_1X_1Y_1Z_1$) задается соотношением:

$$[\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3]^T = A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T, [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T = A^T[\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3]^T \quad (15)$$

где A - ортогональная матрица, поэтому $A^{-1} = A^T$.

Для описания геометрии тела и после деформации удобно использовать цилиндрическую систему координат, только она также будет криволинейной: s, r, γ причем теперь s - расстояние по дуге искривленной оси.

Поясним выбор этой системы координат. Выберем некоторую точку "С" на произвольно искривленной оси.

Ее радиус-вектор относительно исходной точки начала координат системы ($O''X''O''Y''$) будет $\vec{r}_c$ и имеет компоненты в системе $O''X''O''Y''$: $x''_{ocu}, y''_{ocu}, z''_{ocu}$. В системе $O_1X_1Y_1Z_1$ - криволинейной, с тем же началом координат компоненты этого вектора $x_{1ocu}, y_{1ocu}, z_{1ocu}$. Проведем через эту точку плоскость, перпендикулярную к касательной в этой точке оси. Так как положение касательной определяет положение орта $\vec{i}'$ системы $O_1X_1Y_1Z_1$, то в указанной плоскости сечения будут находиться орты $\vec{j}', \vec{k}'$ этой системы. Принимая гипотезу плоских сечений, получаем, что в рассматриваемой плоскости контур тела после искривления не изменится и определится зависимостью $r=f(s, \gamma)$, где s - текущая координата по длине недеформированного тела или длина дуги искривленного тела, γ - текущий угол, характеризующий положение точки на контуре в рассматриваемом сечении; r - радиус точки, т.е. расстояние от оси до этой точки в рассматриваемой плоскости (перпендикулярной оси). Для тела вращения $r=f(s)$ - радиус не зависит от угловой координаты; для цилиндра $r=\text{const}$. Орты $\vec{j}', \vec{k}'$ могут быть приняты в качестве орт вспомогательной системы $SY'_1Z'_1$, расположенной в плоскости сечения, перпендикулярном оси в данной точке С и имеющей эту точку своим началом. При этом точка на контуре будет характеризоваться радиусом-вектором $\vec{r}'$ с модулем, определяемым по формуле, приведенной выше; начало его - точка С, компоненты y'_1, z'_1 - соответственно по ортам $\vec{j}', \vec{k}'$.

Положение точки на контуре, принадлежащем поверхности искривленного тела относительно точки О будет характеризоваться радиусом - вектором $\vec{r}_o$, складывающимся из суммы двух векторов:

$$\begin{aligned}\vec{r}_o &= \vec{r}_c + \vec{r}' = x_{1ocu} \cdot \vec{i} + y_{1ocu} \cdot \vec{j} + z_{1ocu} \cdot \vec{k} + y'_1 \cdot \vec{j}' + z'_1 \cdot \vec{k}' = \\ &= x_{1ocu} \cdot \vec{i} + (y_{1ocu} + y'_1) \cdot \vec{j} + (z_{1ocu} + z'_1) \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

Отсюда, окончательно координаты точки на поверхности произвольного искривленного тела

$$[x_1 \ y_1 \ z_1]^T = [x_{1ocu} \ y_{1ocu} \ z_{1ocu}]^T + [0 \ y'_1 \ z'_1]^T$$

причем $z_1'^2 + y_1'^2 = r^2$, где $r=f(s, \gamma)$. С учетом переходных формул (15):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{ocu}'' \\ y_{ocu}'' \\ z_{ocu}'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{bmatrix},$$

$$y'_1 = r(s, \gamma) \cos \gamma; \quad z'_1 = r(s, \gamma) \sin \gamma$$

Заметим, что элементы матрицы A (см.14) всецело определяются формой искривленной оси и изменяются в зависимости от $x_{ocu}'', y_{ocu}'', z_{ocu}''$, зависящих, как следует из выражения для уравнения пространственной кривой (10), от параметра - дуги s , так что матрица A - также функция этого параметра $A = A(s)$;

$$x_{1ocu} = x_{1ocu}(s), \ y_{1ocu} = y_{1ocu}(s), \ z_{1ocu} = z_{1ocu}(s)$$

Компоненты точки поверхности, как известно, могут быть представлены в общем виде:

$$\vec{r} = r(u, v), \ x = x(u, v), \ z = z(u, v)$$

В нашем случае $u=s$ - длина дуги; $v=\gamma$ - угловая координата, т.к.:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1ocu}(s) \\ y_{1ocu}(s) \\ z_{1ocu}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y'_1(s, \gamma) \\ z'_1(s, \gamma) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ocu}''(s) \\ y_{ocu}''(s) \\ z_{ocu}''(s) \end{bmatrix} + A^{-1}r(s, \gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix}$$

Таким образом, задание искривленной поверхности сводится к заданию координат искривленной оси как функций параметра дуги и закону изменения радиуса точки в плоскостях, перпендикулярных оси.

Как следует из формул расчета аэродинамических характеристик (7) и (8), одной из главных задач является определение выражения для компонент единичного вектора нормали к поверхности. Известно соотношение

$$\vec{N} = \frac{[\partial(y, z)/\partial(u, v)]\vec{i} + [\partial(z, x)/\partial(u, v)]\vec{j} + [\partial(x, y)/\partial(u, v)]\vec{k}}{\sqrt{[\partial(y, z)/\partial(u, v)]^2 + [\partial(z, x)/\partial(u, v)]^2 + [\partial(x, y)/\partial(u, v)]^2}} \quad (16)$$

где $\partial(y, z)/\partial(u, v) \dots$ - функциональные определители:

$$\partial(y_1 \dots y_n)/\partial(x_1 \dots x_n) = \det[\partial y_i / \partial x_k]$$

Так как при описании поверхности пользуемся компонентами x'', y'', z'' и неизвестными s и γ , необходимо получить производные типа $x''^s = \partial x'' / \partial s; \dots z''^\gamma = \partial z'' / \partial \gamma$.

Дифференцируя соотношения в матричном виде для x'', y'', z'' (15) и переходя для удобства в систему $X_I Y_I Z_I$, получим:

$$\begin{bmatrix} (x''^s)' \\ (y''^s)' \\ (z''^s)' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x''_{ocu}^s \\ y''_{ocu}^s \\ z''_{ocu}^s \end{bmatrix} + \left[A \frac{dA^{-1}}{ds} r + \frac{dr}{ds} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} (x''^\gamma)' \\ (y''^\gamma)' \\ (z''^\gamma)' \end{bmatrix} = \frac{dr}{d\gamma} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \gamma \\ \cos \gamma \end{bmatrix};$$

где индекс ' показывает, что величины представлены в системе $X_I Y_I Z_I$.

Следует учесть, что dr/ds - это изменение радиуса тела по длине дуги s , то есть если $r(s, \gamma) = r_1(s)r_2(\gamma)$, то $dr/ds = r_2(\gamma)dr_1(s)/ds$, причем для тела вращения $r_2(\gamma) = 1$ и $r(s, \gamma) = r_1(s) = r(s)$; для цилиндра $r = \text{const}$ и $dr/ds = 0$.

Из указанных формул следует, что главной задачей при определении производных является определение матрицы производных $dA^{-1}/ds = dA^T/ds$. Заметим, что проще рассмотреть выражение dA/ds : $dA/ds = [da_{ij}/ds]$, тогда:

$$dA^T/ds = [da_{ij}^T/ds] = [da_{ij}/ds]^T$$

Рассмотрим указанное выражение с геометрической точки зрения. Так как A - матрица направляющих косинусов, определяющих положение криволинейной системы $X_I Y_I Z_I$ относительно базовой (декартовой) $X'' Y'' Z''$, которое изменяется вдоль дуги s , то dA/ds - это приращение (изменение) положения направляющих косинусов вдоль дуги при приращении последней на величину ds . Так как в качестве подвижных орт криволинейной системы координат были выбраны орты, связанные с касательной, нормалью и бинормалью для пространственной кривой оси (11)-(13), то для получения приращения dA можно воспользоваться известными формулами для изменения положения подвижного трехгранника, связанного с пространственной кривой (формулы Френе - Серпе):

$$\vec{\sigma}' = d\vec{\sigma}/ds = K\vec{n}; \quad \vec{n}' = d\vec{n}/ds = -K\vec{\sigma} + \tau\vec{b}; \quad \vec{b}' = d\vec{b}/ds = -\tau\vec{n} \quad (18)$$

где K, τ - кривизна и кручение пространственной кривой;

$\vec{\sigma}, \vec{n}, \vec{b}$ - единичные вектора касательной, нормали и бинормали.

С учетом определения матрицы A имеем:

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \\ -n_x & -n_y & -n_z \\ -b_x & -b_y & -b_z \end{bmatrix}; \quad \vec{A} = A \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix}; \quad \frac{dA}{ds} = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \sigma'_y & \sigma'_z \\ -n'_x & -n'_y & -n'_z \\ -b'_x & -b'_y & -b'_z \end{bmatrix} \quad (19)$$

Подставляя выражения для производных (18), получим

$$\frac{dA}{ds} = \begin{bmatrix} Kn_x & Kn_y & Kn_z \\ (K\sigma_x - \tau b_x) & (K\sigma_y - \tau b_y) & (K\sigma_z - \tau b_z) \\ \tau n_x & \tau n_y & \tau n_z \end{bmatrix}$$

Следует подчеркнуть, что в указанном соотношении $n_x \dots b_z$ - компоненты нормали, касательной и бинормали в данной точке пространственной кривой - оси тела, выраженные в прямолинейной системе координат $X''Y''Z''$. Итак, dA/ds выражается через компоненты матрицы A в данной точке оси, а также через значения кривизны ρ_k и кручения ρ_τ в данной точке, определяемые по формулам:

$$K = (1/\rho_k) \sqrt{(d^2x/ds^2)^2 + (d^2y/ds^2)^2 + (d^2z/ds^2)^2}$$

$$\tau = \frac{1}{\rho_\tau} = \frac{1}{K^2} \begin{bmatrix} dx/ds & dy/ds & dz/ds \\ d^2x/ds^2 & d^2y/ds^2 & d^2z/ds^2 \\ d^3x/ds^3 & d^3y/ds^3 & d^3z/ds^3 \end{bmatrix}$$

Для плоской кривой кручение $\tau=0$, поэтому в случае выбора системы координат, ориентированной относительно плоскости изгиба, так что в последней лежат оси $X''Y''$:

$$\frac{dA}{ds} = \begin{bmatrix} Kn_x & Kn_y & 0 \\ K\sigma_x & K\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Транспонируя с учетом свойств ортогональности и разбивая на сумму двух матриц, получим окончательно для общего случая изгиба:

$$\frac{dA^{-1}}{ds} = K \begin{bmatrix} n_x & \sigma_x & 0 \\ n_y & \sigma_y & 0 \\ n_z & \sigma_z & 0 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} 0 & -b_x & n_x \\ 0 & -b_y & n_y \\ 0 & -b_z & n_z \end{bmatrix} \quad (20)$$

Заметим, что вектор первых членов при определении производных $x''_{ocu}, \dots, x''_{ocu}^s \dots$ есть не что иное, как выражение компонент касательной к искривленной оси в рассматриваемой точке, так что с учетом обозначений:

$$\begin{bmatrix} x''_{ocu}^s & y''_{ocu}^s & z''_{ocu}^s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} dx''_{ocu} / ds & dy''_{ocu} / ds & dz''_{ocu} / ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \end{bmatrix}^T$$

используя полученные выражения (19) и (20) для матриц A , и dA^{-1}/ds через компоненты $\sigma_x \dots n_z$, K , τ и проводя перемножения в соответствии со свойствами ортогональности ортонормированных базисных векторов, получим из (17)

$$V_{n\infty} = \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{N} = V_{x\infty} N_x + V_{y\infty} N_y + V_{z\infty} N_z$$

$$\begin{bmatrix} (x''^s)' \\ (y''^s)' \\ (z''^s)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} K \cos \gamma \\ -\tau \sin \gamma \\ \tau \cos \gamma \end{bmatrix} + \frac{dr}{ds} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} (x''^\gamma)' \\ (y''^\gamma)' \\ (z''^\gamma)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (dr/d\gamma) \cos \gamma - r \sin \gamma \\ (dr/d\gamma) \sin \gamma + r \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Подставляя полученные соотношения в выражения для вектора нормали (16), получим компоненты нормали к поверхности тела с произвольно искривленной осью. После перехода в систему $X_I Y_I Z_I$:

$$N_{x_1} = \frac{1}{F_N} \left(\frac{dr}{ds} - \frac{dr}{d\gamma} \tau \right); \quad N_{y_1} = \frac{-1}{F_N} \left(\frac{dr}{d\gamma} \frac{\sin \gamma}{r} + \cos \gamma \right) (1 + rK \cos \gamma);$$

$$N_{z_1} = \frac{1}{F_N} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{d\gamma} \cos \gamma - r \sin \gamma \right) (1 + rK \cos \gamma); \quad (21)$$

$$F_N = \sqrt{[(dr/ds) - (dr/d\gamma)\tau]^2 + [(1/r^2)(dr/d\gamma)^2 + 1][1 + rK \cos \gamma]^2}$$

В частном случае для цилиндра

$$N_{x_1} = 0; \quad N_{y_1} = -\cos \gamma; \quad N_{z_1} = -\sin \gamma \quad (22)$$

Для элемента площади поверхности в точке (u, v) известно соотношение:

$$dS = |d\vec{S}| = \sqrt{S(u, v)} du dv = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

В то же время для вектора нормали:

$$\vec{N} = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) / |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$$

Сопоставляя, получим выражение для элементарной площади поверхности произвольного искривленного тела:

$$dS = \sqrt{[(dr/ds) - (dr/d\gamma)\tau]^2 + [(1/r^2)(dr/d\gamma)^2 + 1][1 + rK \cos \gamma]^2} r d\gamma ds \quad (23)$$

Для искривленного цилиндра с произвольной осью:

$$dS = [1 + rK \cos \gamma] r d\gamma ds \quad (24)$$

С учетом переходных формул и взаимной ориентации систем XYZ и $X''Y''Z''$ имеем также:

$$\begin{bmatrix} N_{x''} \\ N_{y''} \\ N_{z''} \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} N_{x_1} \\ N_{y_1} \\ N_{z_1} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} N_{x''} \\ N_{y''} \\ N_{z''} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Укажем некоторые соотношения для скоростей. С учетом формул (3) имеем

$$V_{n\infty} = \begin{bmatrix} AB^{-1} \begin{bmatrix} V_\infty \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{x_1} \\ N_{y_1} \\ N_{z_1} \end{bmatrix} = [C_1 \quad C_2 \quad C_3] \begin{bmatrix} N_{x_1} \\ N_{y_1} \\ N_{z_1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

где C_1, C_2, C_3 - члены вектора C (компоненты скорости набегающего потока в местной системе координат), являющиеся функцией координаты x'' или дуги s оси тела, так как A зависит от указанных величин» В этом выражении использовано представление скорости набегающего потока с помощью B - матрицы перехода от связанной к скорости системе координат

$$\begin{bmatrix} V_{x''_\infty} & V_{y''_\infty} & V_{z''_\infty} \end{bmatrix}^T = B^{-1} \begin{bmatrix} V_\infty & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (27)$$

Компоненты вектора дополнительной скорости, возникающей при вращении тела, после раскрытия векторного произведения (5) и представления в матричной форме запишутся:

$$\begin{bmatrix} V_{x\omega} \\ V_{y\omega} \\ V_{z\omega} \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 0 & \Delta z_A & -\Delta y_A \\ -\Delta z_A & 0 & \Delta x_A \\ \Delta y_A & -\Delta x_A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$V_{n\omega} = \begin{bmatrix} V_{x\omega} & V_{y\omega} & V_{z\omega} \end{bmatrix} A_0 A^T \begin{bmatrix} N_{x_1} \\ N_{y_1} \\ N_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A A_0 \begin{bmatrix} V_{x\omega} \\ V_{y\omega} \\ V_{z\omega} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{x_1} \\ N_{y_1} \\ N_{z_1} \end{bmatrix}$$

Последнее получено с учетом свойств транспонирования матриц.

Отметим некоторые особенности величин Δx_A , Δy_A , Δz_A . Как показали выше, координаты точки можно представить в виде суммы двух векторов. С учетом выражения для вектора относительного положения текущей точки (6) и центра вращения, компоненты которого рассматриваем, запишем

$$\vec{r}_A = \vec{r} - \vec{r}_T = \vec{r}_c + \vec{r}' - \vec{r}_T = (\vec{r}_c - \vec{r}_T) + \vec{r}'$$

Тогда

$$V_{n\omega} = [\vec{\omega} \times (\vec{r}_c - \vec{r}_T)]\vec{N} + (\vec{\omega} \times \vec{r}')\vec{N}$$

В свою очередь вектор нормали можно представить в виде суммы двух векторов $\vec{N}_n + \vec{N}_p$, где $\vec{N}_n$ лежит в плоскости $(\vec{j}', \vec{k}')$, перпендикулярной оси в данной точке по продолжению вектора $\vec{r}'$, $\vec{N}_p$ направлен параллельно орту $\vec{i}'$. С учетом коллинеарности векторов $\vec{N}_n$ и $\vec{r}'$ окончательно

$$V_{n\omega} = [\vec{\omega} \times (\vec{r}_c - \vec{r}_T)]\vec{N} + (\vec{\omega} \times \vec{r}')\vec{N}_p$$

Для цилиндра вектор $\vec{N}$ направлен по радиус-вектору $\vec{r}'$, так что

$$V_{n\omega} = [\vec{\omega} \times (\vec{r}_c - \vec{r}_T)]\vec{N}$$

Таким образом, можно рассматривать $V_{n\omega}$ как сумму двух составляющих - определяемой положением соответствующей точки С на оси относительно центра вращения и относительным положением точки С и точки на контуре. Компоненты вектора $\vec{r}_A$ запишутся в виде:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_A \\ \Delta y_A \\ \Delta z_A \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} x''_{ocu} - x''_T \\ y''_{ocu} - y''_T \\ z''_{ocu} - z''_T \end{bmatrix} + A_0 A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A^1 \\ y_A^1 \\ z_A^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_A^2 \\ y_A^2 \\ z_A^2 \end{bmatrix}$$

где x_A^1, y_A^1, z_A^1 - относительные координаты оси; x_A^2, y_A^2, z_A^2 - координаты вектора $\vec{r}' = \vec{r}_{CA}$, соединяющего точку на контуре и точку оси, представленные в системе XYZ.

С учетом вышеизложенного

$$V_{n\omega} = D^1 \begin{bmatrix} N_{x_1} & N_{y_1} & N_{z_1} \end{bmatrix}^T + D^2 \begin{bmatrix} N_{x_{1p}} & N_{y_{1p}} & N_{z_{1p}} \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

где D^1 - вектор, определяемый исключительно положением соответствующей проекции рассматриваемой точки на ось - точки С;

D^2 - вектор, определяемый относительным положением точки на поверхности А и ее проекции С.

Рассмотрим первую часть - вектор D^1 . Перейдем от системы XYZ к системе $X''Y''Z''$.

$$D^{1T} = AA_0^{-1} \begin{bmatrix} 0 & z'_A & -y'_A \\ -z'_A & 0 & x'_A \\ y'_A & -x'_A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -\omega_y(z''_{ocu} - z''_T) - \omega_x(y''_{ocu} - y''_T) \\ -\omega_x(z''_{ocu} - z''_T) + \omega_z(x''_{ocu} - x''_T) \\ \omega_x(y''_{ocu} - y''_T) + \omega_y(x''_{ocu} - x''_T) \end{bmatrix}$$

Для случая плоского искривления оси

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & \sin \varepsilon & 0 \\ -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где ε - угол наклона касательной к искривленной оси в данной точке:

$$D^{1T} = \begin{bmatrix} \omega_x(-z''_{ocu} \sin \varepsilon) + \omega_y(-z''_{ocu} \cos \varepsilon) + \omega_z(x''_{ocu} \cos \varepsilon - y''_{ocu} \sin \varepsilon) \\ -z''_{ocu} \cos \varepsilon \omega_x + \sin \varepsilon z''_{ocu} \omega_y + (y''_{ocu} \sin \varepsilon + x''_{ocu} \cos \varepsilon) \omega_z \\ \omega_x y''_{ocu} + \omega_y x''_{ocu} \end{bmatrix}$$

Раскрывая вторую часть, получили

$$D^{2T} = AA_0^{(-1)} \begin{bmatrix} 0 & z_A^2 & -y_A^2 \\ -z_A^2 & 0 & x_A^2 \\ y_A^2 & -x_A^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Вторую составляющую скорости можно также представить в виде:

$$V_{n\omega}^2 = (-N_p^T) A \begin{bmatrix} 0 & A_3^T R & A_2^T R \\ A_3^T R & 0 & -A_1^T R \\ -A_2^T R & -A_1^T R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

где N_p - вектор-столбец компонент вектора $\vec{N}_p$;

$$R = r(s, \gamma) [0 \quad \cos \gamma \quad \sin \gamma]^T ;$$

A_1^T, A_2^T, A_3^T - строки транспонированной матрицы A .

Используя выражения для нормальных составляющих скоростей относительного движения $V_{n\infty}$ (26) и $V_{n\omega}$ (29), можно рассчитать в каждой точке поверхности коэффициент давления по (2). При этом предполагается, что полностью определено положение в пространстве искривленной оси: самое удобное - как функции дуги s , так что можно рассчитать члены переходной матрицы направляющих косинусов $A(s)$, а также задано изменение радиуса тела $r(s, \gamma)$.

Разбив поверхность тела на ряд элементов: например по дуге s : Δs и углу γ : $\Delta \gamma$, можно приближенно (численно) рассчитать интегралы (7), (8) - коэффициенты аэродинамических сил и моментов (в процессе интегрирования проверяются условия затенения и соответствующие участки либо не включаются в интеграл, либо давление в них принимается постоянным).

Выводы

Разработан эффективный матричный метод описания геометрии тел с произвольной искривленной осью, на основе которого создана общая методика расчета аэродинамических характеристик таких тел, использующая физическую гипотезу «ньютонова торможения». Указанный подход позволяет рассчитать не только аэродинамические, но и инерционные характеристики искривленных тел и может служить основой для формирования комбинированной методики деформированных тел с головной частью и оперением.

Список литературы

1. Романова И.К., Соловьев В.С. Исследование особенностей аэродинамики искривленных тел // // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 11. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/249741.html> (дата обращения 14.11.2012).
2. Аэродинамика ракет. В 2 кн. / под ред. М. Хемша, Дж. Нилсена; пер. с англ. под ред. А.Д. Хонькина. М.: Мир, 1989. Кн. 1 : Введение в аэродинамику ракет. 426 с.; Кн. 2 : Методы аэродинамического расчёта. 512 с.

Method of calculating aerodynamic characteristics of bodies with arbitrarily curved axis

11, November 2012

DOI: 10.7463/1112.0492155

Romanova I.K., Soloviev V.S.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

romanova@sm.bmstu.rusm4@sm.bmstu.ru

The study of aerodynamics of bodies that received permanent deformation in the process of movement is a very important task. The authors developed an efficient matrix method for describing the geometry of bodies with an arbitrarily curved axis; this method was used as the basis for creating a general method for calculating aerodynamic characteristics of such bodies; this general technique is based on the physical "Newtonian inhibition" hypothesis. This approach allows to calculate not only aerodynamic but inertial characteristics of curved bodies; also it can serve as a basis for formation of a combined method of deformed bodies with head and tail surfaces.

Publications with keywords:[the spatial curve](#), [curved body](#), [the hypothesis of "Newtonian inhibition"](#), [aerodynamic characteristics](#), [curvilinear coordinate system](#)

Publications with words:[the spatial curve](#), [curved body](#), [the hypothesis of "Newtonian inhibition"](#), [aerodynamic characteristics](#), [curvilinear coordinate system](#)

References

1. Romanova I.K., Solov'ev V.S. Issledovanie osobennostei aerodinamiki iskrivlennykh tel [Studying special features of aerodynamics of curved bodies]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 11. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/249741.html> , accessed 14.11.2012.
2. Hemsch M.J., Nielsen J.N., eds. *Tactical Missile Aerodynamics*. New York, AIAA, 1986. 858 p. (*Progress in Astronautics and Aeronautics*, vol. 104). (Russ. ed.: Khemsh M., Nilsen Dzh., eds. *Aerodinamika raket. V 2 kn.* Moscow, Mir, 1989. *Kn. 1 : Vvedenie v aerodinamiku raket.* 426 p.; *Kn. 2 : Metody aerodinamicheskogo rascheta.* 512 p.).