Рычажный гаситель колебаний в механической системе с объектом защиты от вибраций в виде твердого тела на упругих опорах

10, октябрь 2012

DOI: 10.7463/1012.0465518

Елисеев С. В., Кашуба В. Б., Савченко А. А.

УДК 62.752

Россия, НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования,
Иркутский государственный университет путей сообщения.

eliseev_s@inbox.ru

Введение

В теории и практике виброзащитных систем динамические гасители колебаний (ДГ) достаточно известны и используются для уменьшения вибраций на объектах защиты в тех случаях, когда внешнее возмущение носит гармонический характер с постоянной частотой $[1÷4]$.

При всем разнообразии конструктивных форм динамических гасителей поиск новых решений продолжается. В этом плане определенный интерес представляют устройства с рычажными связями. Некоторые вопросы теоретического обоснования и оценки возможных механических колебательных систем с рычажными механизмами приведены в работе [5]. Вместе с тем, ряд направлений в задачах динамического гашения не получили должного развития. В частности, это относится к изучению особенностей взаимодействия ДГ с объектом защиты, которые имеют две степени свободы, то есть представлены твердым телом на упругих опорах. В таких задачах, как правило, возникает необходимость выбора мест присоединения гасителя и расположения точек контакта для его упругих элементов. Изменяется при этом не только структура системы, но и число степеней свободы всей системы, что предопределяет более сложную схему динамических взаимодействий.

В данной статье рассматриваются вопросы построения математической модели динамического гасителя нетрадиционного типа, что заключается в наличии шарнирной связи между объектом защиты и рычажным устройством. Развиваемый подход является

обобщением обычных задач динамического гашения на систему с двумя степенями свободы, для которой выбор места установки ДГ рассматривается как возможная процедура настройки режима.

1. Общие положения. Постановка задачи исследования

Рассматриваются особенности динамического состояния, привносимые динамическим Г-образным гасителем с учетом координат его закрепления на объекте защиты. Расчетная схема системы представляет собой (рис. 1) объект в виде балки или твердого тела, установленного на упругих опорах k_1 и k_2 . На рис. 1 принят ряд обозначений: z_1 и z_2 - колебания основания; M , I , m_1 и m_2 - массоинерционные параметры; y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , φ , φ_1 - обобщенные координаты системы; $l_1 - l_7$ - расстояния между характерными точками; т. С – точка крепления гасителя (ДГ); т. В, В₁ - места закрепления упругих элементов k_3 , k_4 динамического гасителя. Центр тяжести расположен в т.А.

Рис. 1. Расчетная схема двумерного объекта с Г-образным динамическим гасителем

Для дальнейших расчетов запишем выражения для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_3^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_4^2. \quad (1)$$

Введем ряд соотношений, отражающих связи между обобщенными координатами:

$$y = ay_1 + by_2, \quad \varphi = c(y_2 - y_1), \quad y_3 = y + a_1\varphi, \quad (2)$$

$$a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, \quad c = \frac{1}{l_1 + l_2}.$$

Элементы динамического гасителя m_1 и m_2 участвуют в двух движениях: поступательное движение со скоростью точки C - V_c и вращательное – вокруг точки C с угловой скоростью $\dot{\phi}_1$. В этом случае, скорости m_1 и m_2 должны определяться векторными суммами:

$$\vec{y}_3 = \vec{V}_c + \vec{l}_6 \vec{\phi}_1, \quad \vec{y}_4 = \vec{V}_c + \vec{l}_7 \vec{\phi}_1, \quad (3)$$

где l_6 и l_7 зависят от геометрических особенностей Г-образного элемента; при этом выполняется соотношение

$$y_c = y - l_3 \varphi, \quad (4)$$

а $l_3 = AC$ определяется расстоянием между центром тяжести балки и точкой присоединения гасителя, $\varphi_1 = \varphi_{10} + \Delta\varphi_1$. В рассмотрение также необходимо ввести и угол φ_{20} , который определяет наклон рычага длиной l_7 . Кинематическая схема для определения параметров движения элементов m_1 и m_2 представлена на рис. 2.

Рис. 2. Кинематическая схема для учета геометрических параметров Г-образного гасителя при сложном движении: поступательное (V_c) и вращательное ($\Delta\dot{\phi}_1$)

Значения абсолютных скоростей m_1 и m_2 , $\dot{y}_3$ и $\dot{y}_4$ могут быть получены из выражений (3). Для упрощения выкладок можно принять, что $\varphi_{10} = 0$, $\varphi_{20} = 0$, тогда значения скоростей могут быть найдены:

$$\dot{y}_3 = V_c + l_6 \Delta\dot{\phi}_1, \quad \dot{y}_4 = V_c + l_7 \Delta\dot{\phi}_1. \quad (5)$$

С учетом упрощений выражение для кинетической энергии можно представить в виде:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_1 (V_c + l_6 \Delta\dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_c - l_7 \Delta\dot{\phi}_1)^2 \quad (6)$$

или

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_1(y - l_3\varphi + l_6\dot{\varphi}_1) + \frac{1}{2}m_2(y - l_3\varphi - l_7\dot{\varphi}_1), \quad (7)$$

где $\Delta\dot{\varphi}_1$ заменено для удобства на $\dot{\varphi}_1$.

Предлагаемая схема кинематических соотношений отражает малые перемещения системы и, по-существу, только вертикальные составляющие параметров движения, что упрощает рассмотрение процессов движения, но формирует лишь предварительный этап исследования и необходимость последующих уточнений. Выражение для потенциальной энергии системы может быть записано в виде

$$\ddot{I} = \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_3(y_3 - y_{B_1})^2 + \frac{1}{2}k_4(y_4 - y_{B_2})^2. \quad (8)$$

В выражении (8) принят ряд соотношений

$$y_{B_1} = y - l_4\varphi, \quad y_{B_2} = y + l_5\varphi, \quad (9)$$

откуда следует, что

$$y_3 - y_{B_1} = y_C + l_6\varphi_1 - y + l_4\varphi; \quad y_4 - y_{B_2} = y_C - l_7\varphi_1 - y + l_5\varphi. \quad (10)$$

Так как y_C определяется выражением (4) то

$$y_3 - y_{B_1} = -l_3\varphi + l_6\varphi_1 + l_4\varphi = \varphi(l_4 - l_3) + l_6\varphi_1; \quad (11)$$

$$y_4 - y_{B_2} = -l_3\varphi - l_7\varphi_1 - l_5\varphi = -\varphi(l_3 + l_5) - l_7\varphi_1. \quad (12)$$

В окончательном виде выражение (8) можно записать:

$$\begin{aligned} \ddot{I} = & \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_3[\varphi(l_4 - l_3) + l_6\varphi_1]^2 + \\ & + \frac{1}{2}k_4[-\varphi(l_3 + l_5) - l_7\varphi_1]^2, \end{aligned} \quad (13)$$

или принимая, $a_l = l_4 - l_3$, $b_l = l_3 - l_5$, получим

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + k_2(y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_3(a_l\varphi + l_6\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}k_4(\varphi b_l + l_7\varphi_1)^2. \quad (14)$$

Выражение (8) можно преобразовать, используя свертку

$$\begin{aligned} & k_3a_l^2\varphi^2 + 2k_3a_l\varphi l_6\varphi_1 + k_3l_6^2\varphi_1^2 + k_4\varphi^2b_l^2 + 2k_4\varphi b_l l_7\varphi_1 + k_4l_7^2\varphi_1^2 = \\ & \varphi^2(k_3a_l^2 + k_4b_l^2) + \varphi\varphi_1 2(k_3a_l l_6 + k_4b_l l_7) + \varphi_1^2(k_3l_6^2 + k_4l_7^2), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{откуда } a_2 = k_3 a_1^2 + k_4 b_1^2, b_2 = 2(k_3 a_1 l_6 + k_4 b_1 l_7); a_3 = k_3 l_6^2 + k_4 l_7^2. \quad (16)$$

Тогда в окончательном виде (14) определится

$$\ddot{I} = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - z_2) + \frac{1}{2} [a_2 \varphi^2 + \varphi \varphi_1 b_2 + \varphi_1^2 a_3]^2. \quad (17)$$

Учтем, что $\varphi = c(y_2 - y_1)$, поэтому (17) примет вид

$$\varphi^2 = c^2 a_2 (y_2^2 - 2y_2 y_1 + y_1^2); \varphi \varphi_1 = \varphi_1 c (y_2 - y_1).$$

Окончательно, выражение для потенциальной энергии запишется:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - z_2) + \frac{1}{2} [a_2 c^2 (y_2^2 - 2y_2 y_1 + y_1^2) + b_2 \varphi_1 c (y_2 - y_1)] + \varphi_1^2 a_3. \quad (18)$$

Выражение для кинетической энергии, в свою очередь, примет вид:

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{y}_1 a + b \dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2} I c^2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{y} - l_3 \dot{\varphi} + l_6 \dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y} - l_3 \dot{\varphi} - l_7 \dot{\varphi}_1)^2. \quad (19)$$

После преобразований:

$$\dot{y} - l_3 \dot{\varphi} + l_6 \dot{\varphi}_1 = y_1 (a + l_3 c) + y_2 (b - l_3 c) + l_6 \varphi_1,$$

$$\dot{y} - l_3 \dot{\varphi} - l_7 \dot{\varphi}_1 = a y_1 + b y_2 - l_3 c y_2 + l_3 c y_1 - l_7 \dot{\varphi}_1 = y_1 (a + l_3 c) + y_2 (b - l_3 c) - l_7 \dot{\varphi}_1$$

и введения вспомогательных обозначений:

$$a + l_3 c = a_4, b - l_3 c = a_5, \quad (20)$$

выражение (19) может быть записано в форме

$$T = \frac{1}{2} M (a \dot{y}_1 + b \dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2} I c^2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} m_1 [y_1 a_4 + y_2 a_5 + l_6 \varphi_1]^2 + \frac{1}{2} m_2 [y_1 a_4 + y_2 a_5 - l_7 \dot{\varphi}_1]^2. \quad (21)$$

2. Построение математических моделей

Используя формализм Лагранжа, получим систему дифференциальных уравнений движений

$$\ddot{y}_1 [(M a^2 + I c^2) + m_1 a_4^2 + m_2 a_4^2] + \ddot{y}_2 [(M a b - I c^2) + m_1 a_4 a_5 + m_2 a_4 a_5] + \ddot{\varphi}_1 (m_1 l_6 a_4 - m_2 l_7 a_4) + k_1 y_1 + y_1 a_2 c^2 - a_2 c^2 y_2 - b_2 c \varphi_1 = k_1 z_1; \quad (22)$$

$$\ddot{y}_1 \left[(Mab - Ic^2) + m_1 a_4 a_5 + m_2 a_4 a_5 \right] + \ddot{y}_2 \left[(Mb^2 + Ic^2) + m_2 a_5^2 + m_1 a_5^2 \right] + \ddot{\varphi}_1 \left[m_1 l_6 a_5 - m_2 l_7 a_5 \right] + k_2 y_2 + a_2 c^2 y_2 - a_2 c^2 y_1 + b_2 c \varphi_1 = k_2 z_2; \quad (23)$$

$$\ddot{y}_1 (m_1 l_6 a_4 - m_2 l_7 a_4) + \ddot{y}_2 (m_1 l_6 a_5 - m_2 l_7 a_5) + \ddot{\varphi}_1 (m_1 l_6^2 + m_2 l_7^2) + b_2 c y_2 - b_2 c y_1 + a_3 \varphi_1 = 0. \quad (24)$$

В табл. 1 представлены коэффициенты уравнений (22)÷(24), приведенных к унифицированному виду в соответствии с работой [4].

В системе координат y_1 , y_2 и φ_1 структура системы обеспечивает возможности «зануления» инерционно-упругих связей между координатами y_1 и y_2 , а также y_2 и φ_1 (табл. 1). При условиях одновременного «зануления» обеих связей на одной и той же частоте, возможно такое состояние системы, при котором каждая из парциальных систем будут двигаться самостоятельно. При этом предполагается, что силы трения будут исчезающе малыми. На основе предварительного анализа полученных выражений можно сделать некоторые выводы.

1. Если $a_1 = 0$, то центр тяжести совпадает с центром вращения для динамического гашения колебаний.

2. Введение ДГ может рассматриваться как введение дополнительной обратной связи, влияющей через перекрестные взаимодействия на движение по координатам y_1 и y_2 . При этом изменяются параметры парциальных систем; что касается характера перекрестных связей, то они носят инерционно-упругий характер.

3.

Коэффициенты системы дифференциальных уравнений в координатах y_1 , y_2 и φ_1

Табл. 1

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\left[Ma^2 + Ic^2 + a_4^2(m_1 + m_2) \right] p^2 + (k_1 + a_2 c^2)$	$\left[(Mab - Ic^2) + a_4 a_5 (m_1 + m_2) \right] p^2 - a_2 c^2$	$(m_1 l_6 a_4 - m_2 l_7 a_4) p^2 - b_2 c$
a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\left[(Mab - Ic^2) + a_4 a_5 (m_1 + m_2) \right] p^2 - a_2 c^2$	$\left[Mb^2 + Ic^2 + a_5^2(m_1 + m_2) \right] p^2 + k_2 + a_2 c^2$	$(m_1 l_6 a_5 - m_2 l_7 a_5) p^2 + b_2 c$
a_{31}	a_{32}	a_{33}
$(m_1 l_6 a_4 - m_2 l_7 a_4) p^2 - b_2 c$	$(m_1 l_6 a_5 - m_2 l_7 a_5) p^2 + b_2 c$	$(m_1 l_6^2 - m_2 l_7^2) p^2 + a_3$

Примечание: $a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}$, $b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$, $c = \frac{1}{l_1 + l_2}$, $a_1 = l_4 - l_3$, $b_1 = l_3 + l_5$, $a_2 = k_3 a_1^2 + k_4 b_1^2$,

$b_2 = 2(k_3 a_1 l_6 + k_4 b_1 l_7)$, $a_3 = k_3 l_6^2 + k_4 l_7^2$, $a_4 = a + l_3 c$, $a_5 = b - l_3 c$; при этом $l_4 = l_6$, $l_5 = l_7$ с учетом выбора конфигурации рычага: для координаты $y_1 - b_1 = k_1 z_1$; для координаты $y_2 - b_2 = k_2 z_2$; для координаты $\varphi_1 - b_3 = 0$.

4. При выполнении условий симметрии характер связей меняется: из инерционно-упругих они превращаются в упругие связи

$$a_4 m_1 l_6 - m_2 l_7 a_5 = 0. \quad (25)$$

5. На определенных частотах Г-образный гаситель может обеспечить режим «зануления», то есть превратить динамическое влияние по схеме «ДГ – координата y_2 »: в частности, такая частота определяется:

$$\omega^2 = \frac{b_2 c}{m_1 l_6 a_4 - m_2 l_7 a_5}. \quad (26)$$

Однако, при реализации такого же режима по координате y_2 через «зануление» возможен только при условии

$$\omega^2 = \frac{b_2 c}{m_2 l_7 a_5 - m_1 l_6 a_4}. \quad (27)$$

3. Свойства систем. Выбор координат движения

Как развитие исследования по детализации представлений о динамических свойствах, рассмотрим движение в системе координат y , φ и φ_1 . Выражения для кинетической энергии в этом случае имеет вид, определяемый (6); при введении соотношения (5) получим

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{y} - l_3 \dot{\varphi} + l_6 \dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y} - l_3 \dot{\varphi} - l_7 \dot{\varphi}_1)^2. \quad (28)$$

Потенциальная энергия системы определяется (8), тогда при соотношениях $y_1 = y - l_1 \varphi$, $y_2 = y + l_2 \varphi$ найдем, что

$$II = \frac{1}{2} k_1 (y - l_1 \varphi - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y + l_2 \varphi - z_2)^2 + \frac{1}{2} (a_2 \varphi^2 + \varphi \varphi_1 b_2 + \varphi_1^2 a_3). \quad (29)$$

Запишем систему дифференциальных уравнений движения в координатах y, φ, φ_1 , используя приемы, приведенные выше:

$$\ddot{y}(M + m_1 + m_2) + \ddot{\varphi}(-m_1 l_3 - m_2 l_3) + \ddot{\varphi}_1(m_1 l_6 - m_2 l_7) + k_1 y + k_2 y + \varphi(k_2 l_2 - k_1 l_1) = k_1 z_1 + k_2 z_2; \quad (30)$$

$$\ddot{y}(-m_1 l_3 - m_2 l_3) + \ddot{\varphi}(I + m_1 l_3^2 + m_2 l_3^2) + \ddot{\varphi}_1(-m_1 l_6 l_3 + m_2 l_7 l_3) + y(k_2 l_2 - k_1 l_1) + \varphi(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) + \varphi_1(b_2 \varphi_1 - k_2 l_2 - k_1 l_1); \quad (31)$$

$$\ddot{y}(m_1 l_6 - m_2 l_7) + \ddot{\varphi}(m_2 l_7 l_3 - m_1 l_6 l_3) + \ddot{\varphi}_1(m_1 l_6^2 + m_2 l_7^2) + \varphi b_2 + a_3 \varphi_1 = 0. \quad (32)$$

В табл. 2 представлены коэффициенты унифицированной системы уравнений (30)÷(32).

В обобщенных координатах y, φ и φ_1 система перекрестных связей носит различный характер. Между координатами y и φ имеется инерционно-упругая связь, которая на определенной частоте может «обнуляться» и обеспечивать независимое движение y по отношению к координате φ . В свою очередь, инерционно-упругая связь между φ и φ_1 , также обеспечивает возможность на определенной частоте сделать движения между φ и φ_1 независимыми. Однако между y и φ существует инерционная связь, которая на всех частотах будет проявлять свое действие. Возможность совместных эффектов в связках координат $y - \varphi$ и $\varphi - \varphi_1$ зависит от параметров системы. В целом, при определенных условиях $k_2 l_2 - k_1 l_1$ внешние воздействия при $z_1 = z_2$ могут быть также уравновешены.

Коэффициенты системы дифференциальных уравнений в координатах y, φ и φ_1

Табл. 2

a_{11}	a_{12}	a_{13}
$(M + m_1 + m_2)p^2 + k_1 + k_2$	$(-m_1 l_3 - m_2 l_3)p^2 + k_2 l_2 - k_1 l_1$	$(m_1 l_6 - m_2 l_7)p^2$
a_{21}	a_{22}	a_{23}
$(-m_1 l_3 - m_2 l_3)p^2 + k_2 l_2 - k_1 l_1$	$(I + m_1 l_3^2 + m_2 l_3^2)p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2$	$(-m_1 l_6 l_3 + m_2 l_7 l_3)p^2 + b_2$
a_{31}	a_{32}	a_{33}
$(m_1 l_6 - m_2 l_7)p^2$	$(m_2 l_7 l_3 - m_1 l_6 l_3)p^2 + b_2$	$(m_1 l_6^2 + m_2 l_7^2) + a_3$

Примечание: 1. Возмущение по координате $y \rightarrow (k_1 + k_2), z_1 = b_1$; 2. по координате $\varphi \rightarrow k_2 l_2 z_2 - k_2 l_2 z_2 = b_2$; 3. по координате $\varphi_1 \rightarrow O = b_3$.

Таким образом, в системе координат y, φ, φ_1 система обладает особенностями в спектре динамических свойств. В частности, перекрестная связь (a_{13}) носит инерционный характер, а связь (a_{21}) – инерционно упругий. Режимы развязки колебаний также изменяются; в данном случае «зануление» связи происходит при передаче движения между парциальными системами y и φ происходит при частоте

$$\omega^2 = \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{l_3(m_1 + m_2)}. \quad (33)$$

4. Передаточные функции систем. Динамические свойства.

Для получения передаточных функций в системе координат y, y_2, φ воспользуемся табл.1, полагая, что $z_1 = z_2 = z$, тогда

$$W_1 = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}} = \frac{k_1(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + k_2(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})}{A}, \quad (34)$$

$$W_2 = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}} = \frac{k_1(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{23}) + k_2(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)}{A}, \quad (35)$$

$$W_3 = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{z}} = \frac{k_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + k_2(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})}{A}, \quad (36)$$

$$\text{где } A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{33}a_{12}^2 + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}^2; \quad (37)$$

при этом $a_{i,j} (i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3})$ берутся из табл. 3.12.

В свою очередь, в системе обобщенных координат y, φ, φ_1 также могут быть получены соответствующие передаточные функции при $z_1 = z_2 = z$, тогда

$$W_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{(k_1 + k_2)(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + (k_2 l_2 - k_1 l_1)(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})}{A}, \quad (38)$$

$$W_2 = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{z}} = \frac{(k_1 + k_2)(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{23}) + (k_2 l_2 - k_1 l_1)(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)}{A}, \quad (39)$$

$$W_3 = \frac{\bar{\varphi}_1}{\bar{z}} = \frac{(k_1 + k_2)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + (k_2 l_2 - k_1 l_1)(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})}{A}. \quad (40)$$

Использование передаточных функций позволяет оценить динамические свойства системы, используя характеристическое частотное уравнение (37), а также частотные уравнения числителей выражений (34)÷(36) и (38)÷(40), для получения представлений о

возможных режимах динамического гашения или других форм самоорганизации движения.

5. Оценка динамических свойств

Оценка изменения положения l_3 связана с соответствующими изменениями координат крепления пружин k_3 и k_4 (y_{B_1} и y_{B_2}); при этом происходит смещение центра тяжести системы. Предварительная оценка изменения l_3 может быть произведена с учетом того, что центр масс системы может быть определен по формуле (точка отсчета – левый конец балки, рис. 1).

$$x = \frac{l_1 M + m_1 [l_1 - (l_3 + l_6)] + m_2 (l_1 - l_3 + l_7)}{m_1 + m_2 + M}. \quad (41)$$

Можно показать, что при $m_1 = m_2$, $l_6 = l_7$ и $b_3 = 0$ положение центра масс будет совпадать с положением точки A на рис. 1. Если $l_3 \neq 0$, то при равных l_6 и l_7 , m_1 и m_2

$$x = l - \frac{2m_1 l_3}{M + 2m_1}, \quad (42)$$

то есть при увеличении l_3 - центр масс будет смещаться влево. Такая поправка может быть учтена при детализированных расчетах.

Примем для проведения расчетов ряд значений параметров. Пусть $M = 10$ кг, $k_1 = 10000$ Н/м, $k_2 = 15000$ Н/м, $l_1 = 0,5$ м, $l_2 = 0,7$ м, $I = 6,25$, $l_3 = 1,1$ м, $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 7$ кг, $l_6 = 0,3$ м, $l_7 = 0,4$ м, $k_3 = 1000$ Н/м, $k_4 = 1200$ Н/м, $l_4 = l_6$, $l_5 = l_7$ (с учетом выбора $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$).

$$\left. \begin{aligned} l_4 = l_6 &= 1,1; 1,3; 1,5 \\ l_5 = l_7 &= 0,1; 0,3; 0,5 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Для расчетов используется выражение (34). В таблице 3 представлены значения частот собственных колебаний и динамического гашения.

Частоты собственных колебаний динамического гашения при различных значениях $l_4 = l_6, l_5 = l_7$

Табл.3

Значения $l_4 = l_6, l_5 = l_7$	$\omega_{соб}$	$\omega_{дин}$
$l_4 = l_6 = 1,1,$ $l_5 = l_7 = 0,1$	46.73 12.79 26.35	13.51 31.46
$l_4 = l_6 = 1,3,$ $l_5 = l_7 = 0,3$	46.73 12.79 26.35	33.05 12.79
$l_4 = l_6 = 1,5,$ $l_5 = l_7 = 0,5$	10.84 47.59 28.41	35.17 11.58

На рис. 3 представлено семейство амплитудно-частотных характеристик, в которых изменяемым параметром выступает расстояние между центром тяжести объекта защиты и точкой крепления динамического гасителя колебаний к объекту защиты. Увеличение расстояния изменяет форму частотных характеристик (они сдвигаются в сторону уменьшения частот собственных колебаний).

Рис. 3. Семейство АЧХ по координате y_1 при различных положениях точек крепления динамического гасителя колебаний: кривая 1 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,1$; $l_5 = l_7 = 0,1$; кривая 2 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,3$; $l_5 = l_7 = 0,3$; кривая 3 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,5$; $l_5 = l_7 = 0,5$

Рис. 4. Семейство АЧХ по координате y_2 при различных положениях точек крепления динамического гасителя колебаний: кривая 1 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,1$; $l_5 = l_7 = 0,1$; кривая 2 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,3$; $l_5 = l_7 = 0,3$; кривая 3 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,5$; $l_5 = l_7 = 0,5$

На рис. 4 показано семейство АЧХ по второй координате объекта защиты. В таблице 4 приведены значения соответствующих частот собственных колебаний и динамического гашения, при этом видно, что частоты собственных колебаний совпадают. Частоты динамического гашения отличаются друг друга.

Частоты собственных колебаний динамического гашения при различных значениях

$$l_4 = l_6, l_5 = l_7$$

Табл. 4

Значения $l_4 = l_6, l_5 = l_7$	$\omega_{соб}$	$\omega_{дин}$
$l_4 = l_6 = 1,1$, $l_5 = l_7 = 0,1$	46.73 12.79 26.35	38.15 12.33
$l_4 = l_6 = 1,3$, $l_5 = l_7 = 0,3$	46.73 12.79 26.35	35.87 11.52
$l_4 = l_6 = 1,5$, $l_5 = l_7 = 0,5$	10.84 47.59 28.41	36.47 10.52

Рис. 5. Семейство АЧХ по координате φ при различных положениях точек крепления динамического гасителя колебаний: кривая 1 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,1$; $l_5 = l_7 = 0,1$; кривая 2 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,3$; $l_5 = l_7 = 0,3$; кривая 3 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,5$; $l_5 = l_7 = 0,5$

На рис. 5 представлены АЧХ по координате φ . Отметим ряд характерных особенностей системы, для которой значение частот собственных колебаний и динамического гашения приведены в табл. 5. Обнаружено, что при равенстве нулю свободного члена частотного уравнения числителя передаточной функции (36), АЧХ имеет один режим динамического гашения: при этом в области низких частот АЧХ начинается с нулевого значения.

Частоты собственных колебаний динамического гашения при различных значениях $l_4 = l_6, l_5 = l_7$

Табл.5

Значения $l_4 = l_6, l_5 = l_7$	$\omega_{соб}$	$\omega_{дин}$
$l_4 = l_6 = 1,1,$ $l_5 = l_7 = 0,1$	46.73 12.79 26.35	41.48 0
$l_4 = l_6 = 1,3,$ $l_5 = l_7 = 0,3$	46.73 12.79 26.35	0 48.89
$l_4 = l_6 = 1,5,$ $l_5 = l_7 = 0,5$	10.84 47.59 28.41	0 58.08

В общем случае АЧХ виброзащитной системы с Г-образным динамическим гасителем колебаний представляет собой систему с тремя степенями свободы; ее АЧХ зависят по форме и наличию определяющих режимов от параметров, характеризующих условиях закрепления ДГ на объекте.

Другими словами динамический гаситель колебаний с сочленением в системе балочного типа может создать один или два режима динамического гашения, которые могут быть отнесены к различным точкам объекта защиты.

В этом плане особый интерес представляет ситуация в которой в зависимости от выбора параметров настройки режимы динамического гашения могут размещаться различным образом.

На рис.6а показана АЧХ в которой можно отметить режим динамического гашения в диапазоне частот от 0 до частоты первого резонанса. Более подробно этот участок АЧХ показан на рис. 6 б.

Рис. 6. Семейство АЧХ по разности координат $y_2 - y_1$ при различных положениях точек крепления динамического гасителя колебаний: а) кривая 1 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,5; l_5 = l_7 = 0,5$; кривая 2 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,9; l_5 = l_7 = 0,9$; б) режим динамического гашения в диапазоне от 0 до частоты первого резонанса

Отметим также, что режим первого динамического гашения может перейти в частотный диапазон $\omega_{1cob} - \omega_{2cob}$. На рис. 6 а) – этот режим показан точечной линией. Учитывая развитый характер связей, проявляющихся в значениях коэффициентов частотного уравнения числителя передаточной функции (34) можно предположить, что в системе существует возможность получения двух равных частот динамического гашения. Кроме того, становится возможным расширение понятия динамического гашения по разности координат $y_2 - y_1$. Исследование такого режима может быть проведено с использованием передаточной функции $W(p) = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{z}}$. Одновременно угол поворота объекта защиты будет равен нулю, то есть предлагаемый режим динамического гашения колебаний предопределяет возвратно-поступательное движение объекта защиты при вибрации основания. Такой эффект обеспечивается динамическим гасителем с сочленением (Г-образный ДГ) при соответствующем выборе параметров.

В заключении можно было заметить, что выбор координат расширяет представления о возможных формах режимов динамического гашения колебаний, к примеру, при выборе системы координат в виде y - координата центра масс, и φ - угол поворота объекта защиты относительно центра масс, можно предположить возможность стабилизации объекта защиты по y и φ одновременно.

Введение ДГ может существенным образом изменить и амплитудно-частотные характеристики системы, приведенной на рис.7, где показано семейство АЧХ системы при

координатах y, φ, φ_1 . При упомянутых условиях из рис.7 видно, как изменяется АЧХ по координате y в зависимости от частоты ω .

Рис. 7. Семейство АЧХ по координате y при различных положениях точек крепления динамического гасителя колебаний: кривая 1 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,1; l_5 = l_7 = 0,1$; кривая 2 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,3; l_5 = l_7 = 0,3$; кривая 3 – соответствует $l_4 = l_6 = 1,5; l_5 = l_7 = 0,5$

Отметим, что АЧХ имеет специфичный вид, определяющий значения коэффициентов передачи амплитуды колебаний от основания к объекту. Характерными являются зоны между ω_{2cob} и ω_{3cob} . Отсутствие резонансных пиков, которых можно было бы ожидать при отсутствии сил трения (как это полагалось изначально), позволяет предполагать появление в системе определенных динамических взаимодействий, в которых реализуются эффекты, внешне эквивалентные действию диссипативных сил. Построение виброзащитных систем, обладающих свойствами, как показано на рис. 7, могло бы создать условия для построения виброзащитных систем, эффективных в достаточно широких частотных диапазонах внешних возмущений.

Заключение

Авторами предлагаются математические модели для динамических гасителей, у которых основным узлом является сочленение в виде кинематической пары V класса с объектом защиты. Показано, что в системах с большим числом степеней свободы Г-образные гасители, в силу эффектов сочленения, обладают динамическими особенностями, делающими их перспективными в плане выбора возможных путей настройки, поднастройки и управляемости во время работы.

Развитие теоретических основ построения сочленений позволяет вводить и контролировать динамические свойства виброзащитных систем, включающих в свой

состав механизмы для преобразования движения. Исследования показывают, что введение сочленений на основе предлагаемого метода, точнее формирование математических моделей сочленений, наиболее эффективно в системах комбинированного типа, в которых возвратно-поступательные движения взаимодействуют с возвратно-вращательными. Последнее, особенно интересно тем, что при вращательной паре на вибрирующем основании, появляется возможность использовать для уменьшения колебаний объекта переносные силы инерции. Такой подход в теории и практике решения задач защиты машин и оборудования от вибраций и ударов четко не обозначался и это может стать актуальным для поиска и разработки активных средств вибрационной защиты.

Список литературы

1. Ден Гартог Дж.П. Механические колебания.– М.: Физматгиз, 1960. - 580 с.
2. Корнев Б.Г., Резников П.М. Динамические гасители колебаний. Теория и технические приложения. – М.: Наука, 1978. – 535 с.
3. Елисеев С.В., Нерубенко Г.П. Динамические гасители колебаний. – Новосибирск: Наука, 1982. – 182 с.
4. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. – Иркутск: Издательство Иркутского государственного университета, 2008.- 523 с.

Lever vibration dampener in a mechanical system with an object of protection from vibration, as a solid body on elastic supports

10, October 2012

DOI: 10.7463/1012.0465518

Eliseev S.V., Kashuba V.B., Savchenko A.A.

Russia. Science educational center of modern technologies, system analysis and modelling,
Irkutsk State Transport University
eliseev_s@inbox.ru

The authors consider a mechanical system that has an object of protection in the form of a solid body on two elastic supports. The object of protection has a mass and a moment of inertia and can oscillate around the center of gravity. The dynamic lever vibration dampener has a lever construction and a support point on the object as a rotary joint. Movement of the hinge or choosing a seat for the dampener can significantly change the properties of the system as a whole. Features of the dampener include expression of dynamic properties which depend on the choice of the generalized coordinate system. The authors propose a method of constructing mathematical models and evaluating dynamic properties. They also give results of numerical experiments.

Publications with keywords:[dynamical absorbers of oscillations](#), [selection of system coordinates for describing of movement](#), [maintance of absorbers of oscillation](#)

Publications with words:[dynamical absorbers of oscillations](#), [selection of system coordinates for describing of movement](#), [maintance of absorbers of oscillation](#)

References

1. Den Hartog J.P. *Mechanical Vibrations*. 4th ed. McGraw-Hill Book Company, New York, 1956. (Russ. ed.: Den Gartog Dzh.P. *Mekhanicheskie kolebaniia*. Moscow, Fizmatgiz, 1960. 580 p.).
2. Korenev B.G., Reznikov P.M. *Dinamicheskie gasiteli kolebanii. Teoriia i tekhnicheskie prilozheniia* [Dynamic vibration dampers. Theory and technical applications]. Moscow, Nauka, 1978. 535 p.
3. Eliseev S.V., Nerubenko G.P. *Dinamicheskie gasiteli kolebanii* [Dynamic vibration dampers]. Novosibirsk, Nauka, 1982. 182 p.
4. Eliseev S.V., Reznik Iu.N., Khomenko A.P., Zasiadko A.A. *Dinamicheskii sintez v obobshchennykh zadachakh vibrozashchity i vibroizoliatsii tekhnicheskikh ob"ektov* [Dynamic synthesis in the generalized problems of vibration protection and vibration insulation of technical objects]. Irkutsk, Irkutskii GU, 2008. 523 p.