Об изотропных решениях уравнений Максвелла

11, ноябрь 2012

DOI: 10.7463/1112.0489647

Тришин В. Н.

УДК 514.8+537.8

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

trishinvn@bmstu.ru

Введение

В статье исследуются изотропные решения уравнений Максвелла без источников в пространстве-времени Минковского. Тензор напряженности $F_{\mu\nu}$ таких полей удовлетворяет условию изотропности $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} = 0$, где $*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ — дуальный тензор. Хорошо известно, что собственные векторы l^μ таких полей касательны к лучам бессдвиговой конгруэнции. Верно и обратное утверждение, известное как теорема Робинсона [2] (см. также [3]), что с каждой бессдвиговой (аналитической) конгруэнцией связано решение уравнений Максвелла, изотропное вдоль l^μ . Теорема Робинсона не дает явного вида изотропного поля, и в литературе известно мало примеров решений уравнений Максвелла, полученных с помощью этой конструкции (см., например, [4]). В предлагаемой работе получена явная формула для изотропного поля, следующая из теоремы Робинсона.

Для решения задачи используется спинорный формализм абстрактных индексов, изложенный в [1]. Для тензора напряженности электромагнитного поля имеем спинорное представление

$$F_{\mu\nu} = \varphi_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \tilde{\varphi}_{A'B'}\varepsilon_{AB},$$

где симметричный электромагнитный спинор $\varphi_{AB} = \varphi_{(AB)}$ соответствует антисамодуальной части поля

$$-F_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + i * F_{\mu\nu}) = \varphi_{AB}\varepsilon_{A'B'},$$

а спинор $\varphi_{A'B'} = \varphi_{(A'B')}$ — самодуальной части

$$+F_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} - i * F_{\mu\nu}) = \varphi_{A'B'}\varepsilon_{AB}.$$

Уравнения Максвелла имеют вид

$$\nabla^{AA'}\varphi_{AB} = 0, \tag{1}$$

где $\nabla^{AA'}$ — оператор дифференцирования. Эти уравнения эквивалентны условию замкнутости $d\mathcal{F} = 0$ 2-формы

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + i^*F_{\mu\nu}) dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

что совместно с антисамодуальностью $*\mathcal{F} = -i\mathcal{F}$ ведет к выполнению условия козамкнутости (второй пары уравнений Максвелла) $d*\mathcal{F} = 0$.

Спинор ξ^A , соответствующий изотропному векторному полю $l^\mu = \xi^A \xi^{A'}$ и определяющий бессдвиговую конгруэнцию, удовлетворяет [1] системе

$$\xi^A \xi^B \nabla_{AA'} \xi_B = 0. \quad (2)$$

Условие изотропности поля $F_{\mu\nu}$ вдоль l^μ означает, что $\varphi_{AB} = \chi \xi_A \xi_B$, где $\chi(x^\mu)$ — некоторая функция пространственно-временных координат. Задача построения явных решений уравнений Максвелла (1) сводится к нахождению функции $\chi(x)$, удовлетворяющей системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Поле Максвелла, изотропное вдоль бессдвиговой конгруэнции

Уравнения Максвелла (1), записанные для изотропного поля $\varphi_{AB} = \chi \xi_A \xi_B$ с учетом (2), приводят для неизвестной функции $\chi(x)$ к уравнениям

$$\xi^A \nabla_{AA'} \ln \chi = -\nabla_{AA'} \xi^A - \eta_{A'},$$

где $\eta_{A'}$ определяется из уравнения

$$\xi^A \nabla_{AA'} \xi_B = \xi_B \eta_{A'}.$$

В формализме Ньюмана — Пенроуза эти уравнения принимают вид

$$D \ln \chi = \rho - 2\varepsilon, \quad \delta \ln \chi = \tau - 2\beta, \quad (3)$$

где спинор ξ_A выбран в качестве одного из спиноров базисной диады, а $\rho, \varepsilon, \tau, \beta$ — соответствующие спинорные коэффициенты (см. [1]).

Выберем в пространстве Минковского изотропные координаты

$$u = x^0 + x^3, \quad v = x^0 - x^3, \quad \zeta = x^1 + ix^2, \quad \bar{\zeta} = x^1 - ix^2$$

(используется система единиц, где скорость света $c = 1$). Метрика имеет вид

$$ds^2 = dudv - d\zeta d\bar{\zeta}.$$

Масштаб на ξ_A выберем такой, что $\xi_0 = 1, \xi_1 = Y$. Тогда условие (2) нулевого сдвига для конгруэнции эквивалентно системе квазилинейных уравнений

$$Y_{\bar{\zeta}} = Y Y_u, \quad Y_v = Y Y_\zeta \quad (4)$$

для комплексной функции $Y(u, v, \zeta, \bar{\zeta})$, где $Y_u = \partial_u Y = \frac{\partial Y}{\partial u}$ и т.д. Общее решение этой системы можно записать в неявном виде

$$F(Y, u + Y\bar{\zeta}, \zeta + Yv) = 0,$$

где F — произвольная голоморфная функция трех переменных (теорема Керра [1]).

Базисная тетрада Ньюмана — Пенроуза имеет вид

$$\begin{aligned} D = l^\mu \partial_\mu &= Y\bar{Y}\partial_u + \partial_v - Y\partial_\zeta - \bar{Y}\partial_{\bar{\zeta}}, & \Delta = n^\mu \partial_\mu &= \partial_v, \\ \delta = m^\mu \partial_\mu &= Y\partial_u - \partial_{\bar{\zeta}}, & \bar{\delta} = \bar{m}^\mu \partial_\mu &= \bar{Y}\partial_u - \partial_\zeta. \end{aligned}$$

Вычисляя спинорные коэффициенты, получим с учетом (4), что отличны от нуля только коэффициенты $\rho = Y_\zeta - Y_u\bar{Y}$ и $\tau = -Y_u$, и система (3) для функции χ принимает вид

$$\partial_\zeta(Y\chi) = \partial_v\chi, \quad \partial_u(Y\chi) = \partial_{\bar{\zeta}}\chi. \quad (5)$$

Антисамодуальная 2-форма поля Максвелла $\mathcal{F} = \chi L \wedge M$ после подстановки базисных 1-форм $L = du + \bar{Y}d\zeta + Yd\bar{\zeta} + Y\bar{Y}dv$ и $M = d\zeta + Ydv$ равна

$$\mathcal{F} = \chi(du + Yd\bar{\zeta}) \wedge (d\zeta + Ydv). \quad (6)$$

Рассмотрим (дуальное) твисторное пространство с координатами $\mathbb{Z}_\alpha = (\xi_A, \omega^{A'})$, где спинор $\omega^{A'}$ связан с ξ_A условием инцидентности $\omega^{A'} = \xi_A X^{AA'}$, и эрмитова матрица координат

$$X^{AA'} = \begin{pmatrix} u & \zeta \\ \bar{\zeta} & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}.$$

При выбранном масштабе спинора ξ_A спинор $\omega^{A'}$ имеет компоненты

$$\omega^{0'} = u + Y\bar{\zeta} \quad \text{и} \quad \omega^{1'} = \zeta + Yv.$$

Выразим 2-форму $\mathcal{F}$ в (6) через дифференциалы компонент спинора $\omega^{A'}$. Легко видеть, что

$$(du + Yd\bar{\zeta}) \wedge (d\zeta + Ydv) = d\omega^{0'} \wedge d\omega^{1'} + v dY \wedge d\omega^{0'} - \bar{\zeta} dY \wedge d\omega^{1'}. \quad (7)$$

В силу (4) дифференциал $dY = Y_u(du + Yd\bar{\zeta}) + Y_{\bar{\zeta}}(d\zeta + Ydv)$, поэтому

$$\begin{aligned} dY \wedge d\omega^{0'} &= Y_{\bar{\zeta}}(du + Yd\bar{\zeta}) \wedge (d\zeta + Ydv), \\ dY \wedge d\omega^{1'} &= Y_u(du + Yd\bar{\zeta}) \wedge (d\zeta + Ydv). \end{aligned}$$

Тогда из (7) получаем

$$d\omega^{0'} \wedge d\omega^{1'} = (1 + \bar{\zeta}Y_u + vY_{\bar{\zeta}})(du + Yd\bar{\zeta}) \wedge (d\zeta + Ydv),$$

откуда следует, что $\mathcal{F} = f d\omega^{0'} \wedge d\omega^{1'}$, где $\chi(x^\mu) = (1 + \bar{\zeta}Y_u + vY_{\bar{\zeta}})f(x^\mu)$. Подставляя это разложение для χ в (5), получим для $f(x^\mu)$ систему

$$f_{\bar{\zeta}} = Yf_u, \quad f_v = Yf_{\zeta},$$

общее решение которой имеет вид $f = f(u + Y\bar{\zeta}, \zeta + Yv)$, где f — произвольная голоморфная функция двух переменных.

Таким образом, любое изотропное электромагнитное поле определяется антисамодуальной формой

$$\mathcal{F} = f(\omega^{0'}, \omega^{1'}) d\omega^{0'} \wedge d\omega^{1'}; \quad \omega^{0'} = u + Y\bar{\zeta}, \quad \omega^{1'} = \zeta + Yv, \quad (8)$$

где Y неявно задана условием $F(Y, u + Y\bar{\zeta}, \zeta + Yv) = 0$, а f и F — произвольные голоморфные функции двух и трех переменных соответственно.

Из формулы (8) можно получить выражения для векторов напряженности $\vec{E}$ ($E_i = F_{0i}$) электрического поля и индукции $\vec{B}$ ($B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}$) магнитного поля. Для этого введем комплексный вектор Римана — Зильберштейна $\vec{F} = \vec{E} - i\vec{B}$. Его компоненты выражаются следующим образом через компоненты спин-тензора φ_{AB} :

$$F_1 = \varphi_{00} - \varphi_{11}, \quad F_2 = i(\varphi_{00} + \varphi_{11}), \quad F_3 = -2\varphi_{01}.$$

Тогда для вектора $\vec{F}$ получаем формулу, эквивалентную (8):

$$\vec{F} = (1 + \bar{\zeta}Y_u + vY_{\bar{\zeta}})f(u + Y\bar{\zeta}, \zeta + Yv) \begin{pmatrix} 1 - Y^2 \\ i(1 + Y^2) \\ -2Y \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Заключение

На основе теоремы Робинсона получено явное выражение для произвольного изотропного поля Максвелла. Решения имеют вид (8) (поля в трехмерной форме даны (9)) и определяются двумя произвольными голоморфными функциями f и F двух и трех переменных соответственно.

Список литературы

1. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. В 2 т. Т. 2. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени: пер. с англ. М.: Мир, 1988. 572 с. [Penrose R., Rindler W. Spinors and space-time. Vol. 2. Spinor and twistor methods in Space-Time geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 1986. 501 p.]

2. Robinson I. Null electromagnetic fields // Journal of Mathematical Physics. 1961. №. 2. P. 290–291. DOI: 10.1063/1.1703712
3. Tafel J. On the Robinson theorem and shearfree geodesic null congruences // Letters in Mathematical Physics. 1985. Vol. 10, no. 1. P. 33–39. DOI: 10.1007/BF00704584
4. Dalhuisen J. W., Bouwmeester D. Twistors and electromagnetic knots // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2012. №. A45. P. 135201–135209. DOI: 10.1088/1751-8113/45/13/135201

On null solutions of the Maxwell equations

11, November 2012

DOI: 10.7463/1112.0489647

Trishin V. N.

Russia, Bauman Moscow State Technical University
trishinvn@bmstu.ru

Null solutions of the source-free Maxwell equations in the Minkowski space-time are considered. It is well known that a principal null direction of the null electromagnetic field defines a shear-free geodesic null congruence. Conversely, null Maxwell fields can be obtained from the (analytic) shear-free congruence via the Robinson theorem. We present the explicit formula for the electromagnetic field derived from the Robinson and Kerr theorems. The solution depends on two analytic functions of two and three complex variables.

References

1. Penrose R., Rindler W. Spinors and space-time. Vol. 2. Spinor and twistor methods in Space-Time geometry. Cambridge, Cambridge University Press, 1986. 501 p. (Russ. ed.: Penrouz R., Rindler V. Spinory i prostranstvo-vremia. V 2 t. T. 2. Spinornye i tvistornye metody v geometrii prostranstva-vremeni. Moscow, Mir, 1988. 572 p.).
2. Robinson I. Null electromagnetic fields // *Journal of Mathematical Physics*, 1961, no. 2, pp. 290–291. DOI: 10.1063/1.1703712
3. Tafel J. On the Robinson theorem and shearfree geodesic null congruences // *Letters in Mathematical Physics*, 1985, vol. 10, no. 1, pp. 33–39. DOI: 10.1007/BF00704584
4. Dalhuisen J. W., Bouwmeester D. Twistors and electromagnetic knots // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2012, no. A45, pp. 135201–135209. DOI: 10.1088/1751-8113/45/13/135201