Критерии кусочно аффинных смятий и контракций

11, ноябрь 2012

DOI: 10.7463/1112.0493524

Гусев Н. С.

УДК 514.14, 514.17

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
niketeshanser@rambler.ru

1. Введение

В этой статье изучаются многогранные множества и действующие на них кусочно аффинные (кусочно линейные) отображения; эти отображения используются приведенным в статье [1] подходом моделирования обобщенных поверхностей (поверхностей со сложным локальным строением и самоналожениями) и их деформаций. При построениях многогранные множества структурированы полными симплициальными комплексами, а отображения предполагаются симплициальными относительно этих комплексов. В продолжение той статьи изучаются контракции, при действии которых полный прообраз всякой точки их образа связан; для них получены два критерия: дискретный относительно комплекса и выборочный также относительно комплекса. Эти критерии дают возможность с помощью вычислений проверить, является ли данное симплициальное относительно комплекса отображение контракцией. Доказательства критериев проводятся с помощью явных построений.

Используемый здесь подход к понятию кусочной аффинности основан на результатах, изложенных в [3, 2] (см. также [1]). Отметим, что возможны и другие подходы к этому понятию (см. [2]).

2. Предварительные сведения

2.1. Обозначения и сведения из теории множеств

Пусть на некотором множестве A задано рефлексивное и транзитивное бинарное отношение R . Это отношение назовем эквиваленцией, если оно симметрично, и упорядочением, если оно антисимметрично. Каждому бинарному отношению R соответствует обратное отношение $R^\top := \{(x, y) \in A: (y, x) \in R\}$. Ограничением отношения R на множество $B \subset A$ называется отношение $R_B = R \cap B^2 = \{(x, y) \in R: (x, y) \in B\}$.

Любое бинарное отношение R на множестве A имеет рефлексивно-транзитивное замыкание R^{rt} , т.е. наименьшее по включению рефлексивное транзитивное отношение на A , включающее в себя R . Отношение R^{rt} состоит из всех пар $(x, y) \in A^2$, для которых существует конечная последовательность $z_0, z_1, \dots, z_n$ элементов множества A , удовлетворяющая условиям $z_0 = x, z_n = y, (z_{i-1}, z_i) \in R, i = \overline{1, n}$.

Любой эквиваленции S и упорядочению R , заданным на множестве A , поставим в соответствие рефлексивно-транзитивное замыкание отношения $S \cap (R \cup R^T)$, которое назовем редуком эквиваленции S относительно упорядочения R и обозначим $\text{red}[S, R]$. Отметим, что отношение $\text{red}[S, R]$ является эквиваленцией. Кроме того, $\text{red}[\text{red}[S, R], R] = \text{red}[S, R] \subset A$. Эквиваленцию S назовем цепочно устойчивой относительно упорядочения R , если $\text{red}[S, R] = S$.

Каждое отображение $f: A_1 \rightarrow A_2$ имеет свое место действия (область определения) $\text{dom } f = \{x \in A_1: \exists y((x, y) \in f)\}$ и образ $\text{img } f = \{y \in A_2: \exists x((x, y) \in f)\}$. Под ограничением отображения f на множество $B \subset A_1$ понимают отображение $f|B = f \cap (B \times A_2)$. Каждое отображение f в своей области определения порождает эквиваленцию $\text{aeq } f = \{(x, y) \in (\text{dom } f)^2: f(x) = f(y)\}$.

2.2. Основное пространство

Дальнейшее изложение опирается на понятия из статьи [1] (большой частью из введения) с некоторыми изменениями. Здесь ограничимся лишь отличающимися определениями и несколькими замечаниями. Все построения проводятся в некотором бесконечномерном вещественном аффинном пространстве $\mathcal{U}$. В этом пространстве введем топологию, полагая, что множество $A \subset \mathcal{U}$ открыто, если в любом конечном подпространстве X множество $X \cap A$ открыто в обычной топологии конечномерного аффинного пространства.

Для произвольных точек $x, y \in \mathcal{U}$ назовем отрезком $[x, y]$ выпуклую оболочку множества $\{x, y\}$, а интервалом (x, y) — отрезок без его концевых точек x и y . Непустой интервал назовем ребром. Выпуклое подмножество A пространства $\mathcal{U}$, совпадающее с множеством всех своих внутренних точек в топологии аффинной оболочки этого множества, назовем телесным. Для произвольного конечного непустого аффинно независимого множества в пространстве $\mathcal{U}$ назовем симплексом внутренность его выпуклой оболочки в топологии его аффинной оболочки. Ясно, что симплекс телесен. Выражение $A \triangleleft B$ или $B \triangleright A$ обозначает, что симплекс A является гранью симплекса B (или подчинен ему); в этом случае, не различая порядок подчинения, будем также говорить, что один симплекс инцидентен другому. Отметим, что отношение подчинения есть упорядочение на совокупности всех симплексов.

Симплексы A и B назовем гранесопряженными, если пересечение их замыканий или пусто или есть замыкание их общей грани. Конечную совокупность попарно гранесопряженных симплексов назовем симплициальным комплексом. Объединение $\cup A$ всех элементов

произвольной совокупности $\mathbf{A}$ симплексов назовем ее телом: $\cup \mathbf{A} = \bigcup_{A \in \mathbf{A}} A$. Симплициальный комплекс назовем полным, если каждая грань любого его элемента есть элемент комплекса (это эквивалентно компактности его тела). Многогранник, или полиэдр, по определению есть объединение конечного количества симплексов. Известно, что всякий многогранник есть тело некоего симплициального комплекса. Ломаной назовем многогранник, гомеоморфный отрезку $[0, 1]$. Скажем, что точка a есть вершина симплекса A , если $\{a\} \triangleleft A$. Множество всех вершин симплекса A обозначим $\text{vert } A$, а множество всех вершин совокупности $\mathbf{A}$ симплексов обозначим $\text{vertm } \mathbf{A}$.

2.3. Кусочно аффинные отображения

Пусть A — некоторая плоскость в аффинном пространстве $\mathcal{U}$. Отображение $f: A \rightarrow \mathcal{U}$ назовем полноаффинным, если значение этого отображения на аффинной сумме точек плоскости A есть аффинная сумма значений этих точек с теми же коэффициентами. Отображение $f: A \rightarrow \mathcal{U}$ произвольного множества $A \subset \mathcal{U}$ назовем аффинным, если оно является ограничением на A какого-либо полноаффинного отображения. Назовем отображение кусочно аффинным относительно конечной совокупности симплексов, если областью определения отображения является тело указанной совокупности симплексов, ограничение отображения на каждый элемент совокупности симплексов является аффинным и, кроме того, отображение непрерывно. Будем говорить, что отображение кусочно аффинное, если оно кусочно аффинно относительно некоторой конечной совокупности симплексов с компактным связным телом. Известно, что композиция двух кусочно аффинных отображений кусочно аффинна.

Скажем, что тройка $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$ симплициальна, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — полные симплициальные комплексы, отображение f кусочно аффинно относительно комплекса $\mathbf{A}$ и $f(\mathbf{A}) \subset \mathbf{B}$. Отображение f назовем симплициальным относительно полного симплициального комплекса $\mathbf{A}$, если существует такой полный симплициальный комплекс $\mathbf{B}$, что тройка $(\mathbf{A}, f, \mathbf{B})$ симплициальна. Известно, что всякое кусочно аффинное отображение симплициально относительно некоторого полного симплициального комплекса.

3. Смятия

Определение 1. Смятием называется любое кусочно аффинное отображение, при котором образ любого компактного связного множества области определения, содержащего более одной точки, также содержит более одной точки.

Теорема 1. Кусочно аффинное отображение является смятием, если и только если всякое ребро, включенное в область определения отображения, отображается в множество, содержащее более одной точки.

◀ Пусть f — смятие и A — произвольное ребро A , включенное в $\text{dom } f$.

Если a и b — две разные точки в ребре A , то, согласно определению 1, множество $f([a, b])$ содержит более одной точки. Поэтому и множество $f(A)$ содержит более одной точки.

Пусть f — кусочно аффинное отображение, отображающим всякое ребро, включенное в $\text{dom } f$, в множество, содержащее более одной точки. Выберем полный симплициальный комплекс A , относительно которого отображение f симплициально.

Если B — какое-либо связное компактное мощности более единицы подмножество множества $\text{dom } f = \cup A$, то существует симплекс C комплекса A , мощность пересечения которого со множеством B превышает единицу (т.е. в $B \cap C$ найдутся две разные точки a и b).

Согласно предположению, мощность множества $f([a, b])$ превышает единицу; ясно, что и мощность множества $f(B)$ превышает единицу. Так как множество B выбрано произвольно, отображение f есть смятие. ►

Теорема 2. Для произвольного полного симплициального комплекса A и симплициального относительно его отображения f следующие три высказывания равносильны:

- 1) отображение f — смятие;
- 2) ограничение $f|B$ инъективно при произвольном симплексе B комплекса A ;
- 3) ограничение $f|B$ инъективно при произвольном ребре B комплекса A .

◄ Согласно теореме 1, из первого высказывания вытекает третье. В силу аффинности отображения на симплексах комплекса второе и третье равносильны.

Допустим, что верно второе высказывание. Если B — произвольное ребром, включенное в $\text{dom } f = \cup A$, то найдется симплекс C комплекса A , для которого множество $B \cap C$ есть ребро.

В силу инъективности отображения $f|C$ заключаем, что мощность множества $f(B) \supset f(B \cap C)$ превышает единицу. Отсюда по теореме 1 делаем вывод, что отображение f есть смятие. ►

4. Контракции

Определение 2. Кусочно аффинное отображение назовем контракцией, если при его действии полный прообраз всякого компактного связного подмножества, включенного в образ отображения, связан.

Теорема 3. Кусочно аффинное отображение является контракцией, если только полный прообраз при его действии всякого одноточечного подмножества его образа связан.

◄ Из компактности и связности одноточечного множества следует, что при действии контракции полный прообраз одноточечного множества связан.

Пусть кусочно аффинное отображение f таково, что при его действии полный прообраз всякого одноточечного подмножества из образа отображения связан. Выберем произвольное связное компактное подмножество A в $\text{img } f$. Обозначим

$$B = f^{-1}(A) = \{x \in \text{dom } f : f(x) \in A\}.$$

Из замкнутости множества A следует замкнутость множества B , а в силу компактности области определения отображения f множество B компактно.

Задавшись далее замкнутыми непустыми множествами C и D , объединение которых есть B , заметим, что эти множества компактны. Пусть $C' = f(C)$ и $D' = f(D)$. Тогда эти множества замкнуты, причем $C' \cup D' = A$. Поэтому, в силу связности множества A , $C' \cap D' \neq \emptyset$.

Выбрав точку $a \in C' \cap D'$ и обозначив $E = f^{-1}(a)$, заметим, что по свойству отображения f множество E связно.

Ясно, что $(E \cap C) \cup (E \cap D) = E$ и $E \cap C \neq \emptyset$ и $E \cap D \neq \emptyset$. Из этого, согласно замкнутости множеств $E \cap C$ и $E \cap D$ и связности множества E , вытекает, что $(E \cap C) \cap (E \cap D) \neq \emptyset$. Тем самым $C \cap D \neq \emptyset$ и множество B связно. ►

Теорема 4. Пусть A — произвольный полный симплициальный комплекс и f — симплициальное относительно комплекса A отображение. Если в каждом симплексе комплекса $f(A)$ найдется точка a со связным прообразом, то отношение $\text{aeq } f|A$ цепочно устойчиво относительно упорядочения $\triangleleft$.

◄ Задавшись симплексом C из комплекса $f(A)$, выберем два симплекса A и B из комплекса A так, чтобы $f(A) = C = f(B)$. Для произвольной точки c в симплексе C возьмем точку a в симплексе A и точку b в симплексе B так, чтобы $f(a) = c = f(b)$.

Поскольку множество $D = f^{-1}(c)$ связно (отображение f является контракцией), можно для некоторого натурального числа n выбрать такие точки $a = d_0, d_1, \dots, d_n = b$, что соединяющая эти точки ломаная включена в D и при каждом $i = 1, 2, \dots, n$ существует симплекс E_i комплекса A , для которого $(d_{i-1}, d_i) \subset E_i$ (очевидно, что такой симплекс единственный).

Обозначив F_i единственный содержащий точку d_i симплекс комплекса A , $i = 1, 2, \dots, n$, заметим, что вследствие гранесопряженности элементов комплекса симплексы F_{i-1} и F_i представляют собой грани симплекса E_i .

Поскольку отображение f аффинное на симплексах комплекса A , при $i = 1, 2, \dots, n$ выполнено

$$f\left(\frac{1}{2}d_{i-1} + \frac{1}{2}d_i\right) = \frac{1}{2}f(d_{i-1}) + \frac{1}{2}f(d_i) = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = c.$$

Следовательно, симплексы $f(E_i)$ и C , оба содержащие точку $f\left(\frac{1}{2}d_{i-1} + \frac{1}{2}d_i\right) = c$, пересекаются и в силу гранесопряженности совпадают. Кроме того, $c = f(d_i) \in f(F_i)$, так что в силу гранесопряженности $f(F_i) = C$.

Таким образом, симплексы $A = F_0$ и $F_n = B$ соединены набором $F_0, E_1, F_1, \dots, E_n, F_n$ попарно инцидентных симплексов, причем все они эквивалентны по отношению $\text{aeq}(f|A)$, т.е. это отношение цепочно устойчиво относительно $\triangleleft$. ►

Теорема 5. Для любых полного симплициального комплекса $\mathbf{A}$ и симплициальной относительно него контракции f отношение $\text{aeq}(f|\mathbf{A})$ цепочно устойчиво относительно упорядочения $\triangleleft$.

◀ По определению контракции и в силу того, что симплексы не пусты, в каждом симплексе комплекса $f(\mathbf{A})$ найдется точка со связным полным прообразом. Согласно теореме 4, отношение $\text{aeq}(f|\mathbf{A})$ цепочно устойчиво относительно упорядочения $\triangleleft$. ▶

Теорема 6. Если отношение $\text{aeq}(f|\mathbf{A})$ для заданных полного симплициального комплекса $\mathbf{A}$ и симплициального относительно него отображения f является цепочно устойчивым относительно упорядочения $\triangleleft$, то отображение f — контракция.

◀ Для произвольной точки $a \in \text{img } f$ обозначим $A = f^{-1}(a)$. Выберем точки b и c в A и для них выберем симплексы B и C из комплекса $\mathbf{A}$, для которых $b \in B$ и $c \in C$.

Так как $a = f(b) \in f(B)$ и $a = f(c) \in f(C)$, в силу гранесопряженности симплексов заключаем, что $f(B) = f(C)$. Следовательно, $(B, C) \in \text{aeq}(f|\mathbf{A})$.

Из цепочной устойчивости отношения $\text{aeq}(f|\mathbf{A})$ относительно упорядочения $\triangleleft$ вытекает, что для некоторого натурального числа n найдется набор симплексов $B = D_0, \dots, D_n = C$ из комплекса $\mathbf{A}$, которые последовательно попарно инцидентны и эквивалентны симплексам B и C относительно эквиваленции $\text{aeq}(f|\mathbf{A})$.

Так как $D_i \cap A \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n-1$, и образы симплексов D_i совпадают, в каждом из симплексов D_i можно выбрать по точке $d_i \in A$; дополнительно обозначим $d_0 = b$ и $d_n = c$.

Ясно, что для каждого $i = 1, \dots, n$ ребро (d_{i-1}, d_i) включено в тот из симплексов D_{i-1} и D_i , который больше по подчинению. Для любого $t \in (0, 1)$ вследствие аффинности отображения f на симплексах комплекса $\mathbf{A}$ имеем:

$$f(td_{i-1} + (1-t)d_i) = tf(d_{i-1}) + (1-t)f(d_i) = ta + (1-t)a = a.$$

Итак, $(d_{i-1}, d_i) \subset A$, $i = 1, \dots, n$, следовательно, множество A связно. ▶

Теорема 7. Пусть заданы произвольные полный симплициальный комплекс $\mathbf{A}$ и симплициальное относительно него отображение f . Если f — контракция, то отношение $\text{aeq}(f|\mathbf{A})$ цепочно устойчиво относительно упорядочения $\triangleleft$.

◀ Это вытекает из теорем 5 и 6. ▶

Теорема 8. Пусть задан произвольный полный симплициальный комплекс $\mathbf{A}$. Любое отображение f , симплициальное относительно $\mathbf{A}$, является контракцией тогда и только тогда, когда в каждом симплексе комплекса $f(\mathbf{A})$ существует точка со связным полным прообразом.

◀ Если отображение f — контракция, то в каждом симплексе такая точка существует вследствие непустоты симплексов.

Допустим, что в каждом симплексе из $\mathbf{A}$ существует точка со связным полным прообразом. Согласно теореме 4, отношение $\text{aeq}(f|\mathbf{A})$ цепочно устойчиво относительно упорядочения $\triangleleft$, а по теореме 6 делаем вывод, что отображение f — контракция. ▶

5. Заключение

В статье установлен дискретный критерий того, что отображение на комплексе является контракцией. Этот критерий сводится к существованию определенной цепочки последовательно попарно инцидентных симплексов, соединяющих любые два наперед заданных симплекса.

Также в статье в рамках принятого подхода установлен критерий смятия на комплексе, состоящий в условии невырожденности отображения на каждом ребре комплекса.

Список литературы

1. Гусев Н.С. Каноническое разложение кусочно-аффинных функций, многогранники-следы и геометрические вариационные задачи // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12, № 1. – С. 57–94.
2. Рурк К., Сандерсон Б. Введение в кусочно линейную топологию: пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 213 с.
3. Шефер Х. Топологические векторные пространства: пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 360 с.

Criteria for piecewise affine crumples and contractions

11, November 2012

DOI: 10.7463/1112.0493524

Gusev N. S.

Russia, Bauman Moscow State Technical University
niketeshanser@rambler.ru

There are considered piecewise affine maps which are simplicial relative to a complete simplicial complex. Of such maps two kinds are studied: contractions (such that the complete preimage of a point is connected) and crumples (such that the image of a nonsingle-point straight-line segment is nonsingle-point broken line). Discrete criteria (with regard to properties of these maps at simplices of corresponding complexes) for such maps are proved.

References

1. Gusev N. S. Kanonicheskoe razlozhenie kusochno-affinnykh funktsii, mnogogranniki-sledy i geometricheskie variatsionnye zadachi [The canonical expansion of piecewise affine functions, polyhedra-traces, and geometrical variational problems]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2006, vol. 12, no. 1, pp. 57–94.
2. Rourke C. P., Sanderson B. J. *Introduction to piecewise-linear topology*. Springer-Verlag, 1972. 131 p. (Russ. ed.: Rurk K., Sanderson B. *Vvedenie v kusochno lineinuiu topologiiu*. Moscow, Mir, 1974. 213 p.)
3. Schaefer H. H. *Topological Vector Spaces*. Mac Millan Co., New York, 1966. (Russ. ed.: Shefer Kh. *Topologicheskie vektornye prostranstva*. Moscow, Mir, 1971. 360 p.)