Ладейные полиномы в многомерных пространствах

10, октябрь 2012

DOI: 10.7463/1012.0463238

Белоусов А. И., Исаев Д. С., Ремень И. В., Донцов В. В.

УДК 519.115.1

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

al_belous@bk.ru

idenx@ya.ru

bhyk@yandex.ru

dont.val@yandex.ru

Введение.

Как известно (см. [1]), для произвольной прямоугольной шахматной доски ладейным числом называют число способов поставить на эту доску n не бьющих друг друга ладей (при произвольном фиксированном n). Впервые эти числа ввел советский математик С.Е. Аршон в середине 30-х годов. Вычисление ладейных чисел для двумерных и трехмерных досок рассмотрено в работах [1-5]. Для досок более высокой размерности проблема вычисления таких чисел, как и проблема создания эффективного алгоритма их вычисления, пока остается открытой.

В настоящей статье рассматривается обобщение данной теории на многомерный случай (для произвольной размерности), а также приведен алгоритм для вычисления ладейных чисел.

В комбинаторике известна задача подсчета количества подстановок с запрещенными позициями. Если провести аналогию с шахматами, это количество способов постановки на доску n не бьющих друг друга ладей, но с дополнительным запретом ставить ладьи на некоторые клетки доски. В работе исследована задача подсчета количества подстановок с запрещенными позициями в случае произвольной размерности, получена формула для подсчета этого количества подстановок и приведены примеры ее практического применения.

1. Вывод основных формул.

Рассмотрим следующую задачу. Дано множество векторов с d компонентами F . Требуется вычислить $r_k(F)$ – количество k -элементных подмножеств множества F , таких, что все i -ые компоненты векторов этого подмножества попарно различны для всех $i \in [1; d]$.

Известное из [1] определение ладейного полинома без труда переносится на многомерный случай.

Определение 1. Пусть F – множество векторов с d компонентами. Ладейным полиномом назовем производящую функцию

$$R(x, F) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(F) x^k ,$$

$$r_0(F) \equiv 1,$$

при определенных выше числах $r_k(F)$.

С точки зрения «шахматной интерпретации» такое число (для заданного k) равно числу способов поставить k ладей в небоевые позиции на данной многомерной доске, т.е. таким образом, чтобы никакие две ладьи не имели на доске общих координат (в обычном двумерном случае не находились бы на одной горизонтали или на одной вертикали).

Теорема 1. Пусть F – множество векторов с d компонентами, S – вектор из множества F . Пусть $F_S^\#$ – множество векторов F , из которого удалены все вектора, в которых хотя бы одна координата совпадает с той же координатой S . Пусть F_S – множество F , из которого удален вектор S .

Тогда ладейный полином F определяется формулой

$$R(x, F) = xR(x, F_S^\#) + R(x, F_S) .$$

Доказательство. Если из F выбрать k векторов, то вектор S либо выбран, либо не выбран. Если он выбран, то остальные $k - 1$ векторов должны быть выбраны из $F_S^\#$, что осуществимо $r_{k-1}(F_S^\#)$ способами. Если S не выбрано, то все k векторов должны быть выбраны из F_S , что осуществимо $r_k(F_S)$ способами. Таким образом,

$$r_k(F) = r_{k-1}(F_S^\#) + r_k(F_S).$$

Так как $r_0(F_S) \equiv r_0(F) \equiv 1$, то

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i(F) x^i = \sum_{i=1}^{\infty} r_{i-1}(F_S^\#) x^i + \sum_{i=0}^{\infty} r_i(F_S) x^i,$$

но

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_{i-1}(F_S^\#) x^i = \sum_{i=0}^{\infty} r_i(F_S^\#) x^{i+1} = x \sum_{i=0}^{\infty} r_i(F_S^\#) x^i.$$

Таким образом, $R(x, F) = xR(x, F_S^\#) + R(x, F_S)$, что и требовалось доказать.

Приведем алгоритм в псевдокоде, вычисляющий ладейный полином.

Алгоритм 1.

function $R(F)$

begin

if Length(F) = 1

return ($x+1$);

if Length(F) = 0

return 1;

$S \leftarrow$ произвольный вектор из F ;

return $x * R(F_S^\#) + R(F_S)$;

end

В полученном многочлене коэффициенты при x^k будут равны $r_k(F)$

Рассмотрим следующую задачу. Дано $d \geq 1$ конечных множеств $S_1, \dots, S_d$. Мощность i -го множества $|S_i| = n_i$, $m = \min(n_1 \dots n_d)$. Сколько существует матриц с неупорядоченными столбцами размера $d \times m$, таких, что каждая i -ая строка представляет собой перестановку m -элементного подмножества множества S_i для любого $i \in [1; d]$?

Теорема 2. Пусть U – множество определенных выше матриц. Тогда их число составит

$$|U| = \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^d A_{n_i}^m. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть в матрице каким-то образом выбрана 1-ая строка. Это можно сделать $C_{n_1}^m$ способами. Зафиксируем ее. Известно, что количество перестановок множества из k элементов равно $k!$. Рассмотрим i -ую строку матрицы ($i \in [2; d]$). Она состоит из m элементов, то есть может быть получена $C_{n_i}^m m! = A_{n_i}^m$ способами. Тогда, пользуясь комбинаторным правилом умножения, получаем:

$$|U| = C_{n_1}^m \prod_{i=2}^d A_{n_i}^m.$$

Но $C_{n_1}^m = \frac{A_{n_1}^m}{m!}$, поэтому в итоге

$$|U| = \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^d A_{n_i}^m.$$

Теорема доказана.

Заметим, что при $d = 2$, $|U| = m!$

А именно, пусть $d = 2$, $S_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Тогда общая задача сводится к следующей: сколько существует матриц вида $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7 & i_8 \end{pmatrix}$, где вторая строка – перестановка множества S_2 ? Или, что эквивалентно, сколькими способами можно расставить 8 ладей на доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга? Очевидно, что их можно расставить $8!$ способами.

В качестве примера рассмотрим такую задачу.

Дано $d \geq 1$ конечных множеств $S_1, \dots, S_d$. Мощность i -го множества $|S_i| = n_i$, $m = \min(n_1 \dots n_d)$. Дано конечное множество F , называемое множеством “запрещенных позиций”, состоящее из векторов F_i , таких, что для любого $k \in [1; d]$ $F_i(k) \in S_k, i \in [1; |F|]$.

Сколько существует матриц с неупорядоченными столбцами размера $d \times m$, таких что каждая i -я строка является перестановкой m – элементного подмножества множества S_i для любого $i \in [1; d]$ и ни один столбец матрицы не принадлежит множеству F (множество всех таких матриц может быть обозначено как $U \setminus F$)?

Теорема 3. Число

$$|U \setminus F| = \sum_{k=0}^m (-1)^k r_k(F) \frac{\prod_{i=1}^d A_{n_i-k}^{m-k}}{(m-k)!}.$$

Доказательство.

Рассмотрим любую матрицу из множества U , определенного в условии теоремы 2. Число таких матриц $|U| = \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^d A_{n_i}^m$ (в силу теоремы 2).

Рассмотрим подмножества векторов $F_i, i \in [1; m]$ из множества F , таких что $F_i(t) = S_t(i)$, и S_t выбрано так, что $|S_t| = m$. Обозначим через A_i множество матриц содержащих столбец F_i . Найдем количество таких матриц $|A_i|$. Так как один столбец в матрице уже определен (F_i), нужно найти, сколь много матриц размера $d \times (m-1)$ в множестве U . Применяя формулу (1), получаем:

$$|A_i| = |F_i| \frac{1}{(m-1)!} \prod_{i=1}^d A_{n_i-1}^{m-1},$$

где $|F_i|$ – количество векторов в множестве F_i .

$$\text{Далее: } \sum_{i=1}^m |A_i| = (\sum_{i=1}^m |F_i|) \frac{1}{(m-1)!} \prod_{i=1}^d A_{n_i-1}^{m-1}.$$

Обозначим $\sum_{i=1}^m |F_i| = r_1(F)$ – количество векторов в множестве F . Тогда $\sum_{i=1}^m |A_i| = r_1(F) \frac{1}{(m-1)!} \prod_{i=1}^d A_{n_i-1}^{m-1}$.

Рассмотрим $A_i \cap A_j, i \neq j, i, j \in [1; m], i, j$ – фиксированы. $A_i \cap A_j$ – множество матриц из множества U и содержащих столбцы F_i и F_j . Тогда $|A_i \cap A_j|$ – количество матриц размера $d \times (m-2)$ в множестве U , причем $|S_i| = n_i - 2$. Так как два столбца A_i и A_j уже определены, то

$$|A_i \cap A_j| = |F_i \cup F_j| \frac{1}{(m-2)!} \prod_{i=1}^d A_{n_i-2}^{m-2},$$

$$\sum_{i < j} |A_i \cap A_j| = r_2(\mathbf{F}) \frac{1}{(m-2)!} \prod_{i=1}^d A_{n_i}^{m-2}.$$

Здесь $r_2(\mathbf{F}) = \sum_{i < j} |F_i \cup F_j|$, или количество двухэлементных подмножеств множества $\mathbf{F}$, таких, что все компоненты обоих векторов попарно различны.

Аналогично,

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = r_k(\mathbf{F}) \frac{1}{(m-k)!} \prod_{i=1}^d A_{n_i}^{m-k} \text{ для } \forall k \in [1; m],$$

где $r_k(\mathbf{F}) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} |F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_k}|$, или количество k -элементных подмножеств множества $\mathbf{F}$, таких, что все компоненты обоих векторов попарно различны.

По формуле включения-исключения:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_m| = \sum_{k=1}^m (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}| = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} r_k(\mathbf{F}) \frac{1}{(m-k)!} \prod_{i=1}^d A_{n_i}^{m-k},$$

$$|U \setminus \mathbf{F}| = |U| - |A_1 \cup \dots \cup A_m|,$$

$$|U| = \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^d A_{n_i}^m = \frac{(-1)^0 r_0(\mathbf{F})}{(m-0)!} \prod_{i=1}^d A_{n_i}^{m-0}, \text{ а так как } r_0(\mathbf{F}) \equiv 1, \text{ получаем}$$

$$\begin{aligned} |U \setminus \mathbf{F}| &= r_0(\mathbf{F}) \frac{(-1)^0}{(m-0)!} \prod_{i=1}^d A_{n_i}^{m-0} + \sum_{k=1}^m (-1)^k r_k(\mathbf{F}) \frac{1}{(m-k)!} \prod_{i=1}^d A_{n_i}^{m-k} = \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k r_k(\mathbf{F}) \frac{\prod_{i=1}^d A_{n_i}^{m-k}}{(m-k)!}. \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема доказана.

Из формулы (2) при $d = 2$ и $n_1 = \dots = n_d = n$ имеем

$$|U \setminus \mathbf{F}| = \sum_{k=0}^n (-1)^k r_k(\mathbf{F}) (n-k)!,$$

что является известной формулой для числа подстановок с запрещенными позициями (см. [1]).

2. Примеры приложений.

1) Рассмотрим “трехмерные шахматы”. Сколькими способами можно расставить n ладей в трехмерном шахматном кубе $n \times n \times n$ так, чтобы они не били друг друга и не располагались на главной диагонали куба?

В данном примере множество «запрещенных векторов» $\mathbf{F}$ – всевозможные d -компонентные векторы вида $(i \dots i)^T$ для всех $i \in [1; n]$; $d = 3$, $S_1 = S_2 = S_3$,

$$n_1 = n_2 = n_3 = n. \quad \text{Так как} \quad A_{n-k}^{n-k} = (n-k)!, \quad r_k(\mathbf{F}) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$|U \setminus \mathbf{F}| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} ((n-k)!)^{d-2} = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{((n-k)!)^{d-2}}{k!}.$$

Таким образом, n ладей можно расставить $n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!}$ способами.

В частности, при $d = 2$ получаем так называемое «число беспорядков» ([1]):

$$|U \setminus \mathbf{F}| = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \cong \frac{n!}{e}.$$

2) Даны вещества, разбитые на d непересекающихся классов, в каждом классе по n_i веществ, $i \in [1, d]$. Определённые вещества нельзя смешивать. Сколькими способами можно получить смеси из n веществ, используя все вещества?

Пусть $\mathbf{F}$ – множество всевозможных кортежей длины d , i -ый элемент кортежа это вещество i -го класса и во всех кортежах на соответствующих местах расположены вещества, запрещенные к смешиванию. И пусть $m = \min(n_1, \dots, n_d)$.

Ответ можно получить, посчитав $|U \setminus \mathbf{F}| = \sum_{k=0}^m (-1)^k r_k(\mathbf{F}) \frac{\prod_{i=1}^d A_{n_i-k}^{m-k}}{(m-k)!}$,

где числа $r_k(\mathbf{F})$ вычисляются по приведенному выше алгоритму.

3) Компания по отправке подарков закупила k_1 подарков и k_2 подарочных упаковок для них. Подарки необходимо отправить k_3 адресатам. Известно, что некоторые адресаты не любят определенные цвета упаковок, а некоторые подарки не сочетаются с определёнными цветами упаковок. Сколькими способами можно разослать подарки адресатам?

Данная задача аналогична предыдущей, здесь $d = 3$, $n_1 = k_1$, $n_2 = k_2$, $n_3 = k_3$. Множество запрещенных кортежей формируется так же.

4) В бар пришли n математиков, каждый снимает свою шляпу, пальто и шарф и вешает на стойку. По выходу из бара, каждый из математиков случайным образом берет одно пальто, шляпу и шарф. Найти вероятность события, при котором ни один из математиков не наденет правильно свою одежду.

В данной задаче имеем размерность пространства $d = 3$ (три множества: математиков, пальто, шляп), $n_1 = n_2 = n_3 = n$. Сформируем кортежи выбранной по выходу из бара одежды вида $(\text{математик}_i, \text{шляпа}_j, \text{пальто}_k)$, $i, j, k \in [1, n]$, где каждый элемент кортежа – это предметы одежды, который взял математик при выходе из бара и сам математик. Множество из n таких кортежей однозначно задает событие, происходящее при выходе математиков из бара. Для того чтобы, ни один из математиков не надел правильно свою одежду, необходимо, чтобы в этом множестве не содержалось кортежей вида:

$$(\text{математик}_i, \text{шляпа}_i, \text{пальто}_i), \quad i \in [1, n].$$

Пусть $\mathbf{F}$ - множество таких запрещенных кортежей.

По формуле (2), так как $A_{n-k}^{n-k} = (n-k)!$, получаем $r_k(\mathbf{F}) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Далее:

$$|U \setminus \mathbf{F}| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} ((n-k)!)^{d-2} = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{((n-k)!)^{d-2}}{k!} = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!}.$$

Итак, число возможных способов взять одежду так, чтобы ни один из математиков не надел свою одежду правильно:

$$|U \setminus F| = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!}.$$

Теперь подсчитаем общее число способов взять одежду. По формуле (1)

$$|U| = \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^d A_{n_i}^m = (n!)^2.$$

Используя классическое определение вероятности, получаем вероятность искомого события $P = \frac{|U \setminus F|}{|U|} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!}.$

Заключение

В работе дано обобщение конструкции ладейных полиномов на многомерный (для произвольной размерности) случай. Выведены основные формулы, доказана теорема о декомпозиции многомерной доски и на этой основе разработан алгоритм вычисления ладейных полиномов.

Кроме этого, получены результаты, обобщающие (на многомерный случай) метод подсчета числа подстановок с запрещенными позициями.

Все указанные результаты получены впервые. Они представляют собой полезный аппарат для решения ряда прикладных задач. Некоторые примеры таких задач приведены в последнем разделе статьи.

Список литературы

1. Андерсон Дж. Комбинаторика и дискретная математика.- М.: Издательский дом «Вильямс», 2003.- 960 с.
2. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции.- М.: Мир, 2005.- 767 с.
3. Кохась К.П. Ладейные числа и многочлены.- М.: Изд-во МЦНМО, 2003.- 20 с.
4. Krzywonos N., Alayont F. Rook Polynomials in Higher Dimensions. Режим доступа: <http://scholarworks.gvsu.edu/sss/29> (дата обращения 29.06.2012).
5. Benjamin Z. Rook polynomials for chessboard for two and three dimensions. Режим доступа: <http://people.rit.edu/~hxssma/Ben-thesis.pdf> (дата обращения 29.06.2012)

Rook polynomials in multidimensional spaces

10, October 2012

DOI: 10.7463/1012.0463238

Belousov A.I., Isaev D.S., Remen' I.V., Doncov V.V.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

al_belous@bk.ru

idenx@ya.ru

bhyk@yandex.ru

dont.val@yandex.ru

The authors consider a generalization of the well-known combinatorial structure of rook polynomials for boards of arbitrary dimension. The authors obtained basic formulas and examples of their application in practice. An algorithm of computing rook polynomials was developed.

Publications with keywords: [chess board](#), [permutation](#), [rook polynomial](#), [permutation with forbidden positions](#)

Publications with words: [chess board](#), [permutation](#), [rook polynomial](#), [permutation with forbidden positions](#)

References

1. Anderson A. J. *Discrete mathematics with combinatorics*, Prentice. Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2001. (Russ. ed.: Anderson Dzh. *Kombinatorika i diskretnaia matematika*. Moscow, Izdatel'skii dom «Vil'iams», 2003. 960 p.).
2. Stanley R.P. *Enumerative Combinatorics. Vol. 2*. New York/Cambridge, Cambridge University Press, 1999. (Russ. ed.: Stenli R. *Perechislitel'naia kombinatorika. Derev'ia, proizvodiashchie funktsii i simmetricheskie funktsii*. Moscow, Mir, 2005. 767 p.).
3. Kokhas' K.P. *Ladeinye chisla i mnogochleny* [Rook numbers and polynomials]. Moscow, MTsNMO Publ., 2003. 20 p.
4. Krzywonos N., Alayont F. *Rook Polynomials in Higher Dimensions*. Available at: <http://scholarworks.gvsu.edu/sss/29> , accessed 29.06.2012.
5. Benjamin Z. *Rook polynomials for chessboard for two and three dimensions*. Available at: <http://people.rit.edu/~hxssma/Ben-thesis.pdf> , accessed 29.06.2012.