Воздействие на ФАП второго порядка гармонической помехи и аддитивного шума

09, сентябрь 2012

DOI: 10.7463/0912.0475444

Ковальчук А. А.

УДК: 621.396.662

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

nastia_kov-k@rambler.ru

Введение

Помехоустойчивость систем синхронизации до недавнего времени исследовалась лишь при шумовом воздействии [1-3].

С развитием радиотехники, систем связи и космической радионавигации возникла необходимость исследовать системы синхронизации не только при шумовых воздействиях, но и при комбинированных воздействиях, состоящих из аддитивной смеси сигнала, гармонической помехи и шума.

Работы, посвящённые анализу статистических характеристик системы синхронизации при комбинированных воздействиях, исчисляются до настоящего времени единицами [4-5]. В этих работах рассматриваются, как правило, воздействия на ФАП 1-го порядка [6], причём, сами статистические характеристики, получаемые для разных типов ФАП, не сравниваются между собой.

Проведен анализ статистической динамики непрерывных систем фазовой автоподстройки (ФАП) 2-го порядка при наличии гармонической помехи. На основе аппарата марковских случайных процессов (уравнения Фокера-Планка-Колмогорова (ФПК)) путём использования различных приближений получены статистические характеристики фазовой

автоподстройки частоты 2-го порядка. В первую очередь это плотность распределения вероятности (ПРВ) сигнала рассогласования, частота срывов синхронизации, а также средняя разность между колебаниями управляемого генератора и сигнала при комбинированном воздействии на вход ФАП в виде аддитивной смеси сигнала, суммы нескольких гармонических помех и гауссова шума. Приведено сравнение характеристик ФАП 1-го и 2-го порядков.

1. Стохастическая модель системы

Рассмотрим воздействие одной гармоники совместно с шумом, когда частота помехи находится за полосой синхронизации.

Запишем стохастическое дифференциальное уравнение (ДУ) в виде

$$\frac{1}{K\sqrt{S}} \frac{dz}{dt} = \gamma - F(p) \{ [J_0(x_1) \sin(z) + \sqrt{R} J_1(x_1) \sin(\psi)] \sin(z) + [\sqrt{R} J_1(x_1) \times \cos(\psi)] \cos(z) + \frac{1}{\sqrt{S}} N(t) \}, \quad (1)$$

где $z(t)$ - сигнал ошибки; $N(t)$ - низкочастотный шум; R - отношение помеха/сигнал (ОПС), $F(p)$ - передаточная функция, $p = d/dt$.

Данное уравнение описывает изменение во времени усредненной во времени фазовой ошибки (или детерминированной составляющей фазовой ошибки) при одновременном воздействии на систему синхронизации широкополосного шума и узкополосной помехи, частота которой лежит за пределами полосы синхронизации.

На рис. 1 изображены зависимости от времени решений $z(t)$ в системе второго порядка $K=S=1$; $R=1$, $d=4$; $\gamma=0,5$; отношение сигнал/шум (ОСШ)

$r=30$ дБ. В этом случае, $F(\omega) = \frac{1 + j\omega T_2}{1 + j\omega T_1}$. АЧХ и ФЧХ фильтра имеют вид

$$M(\omega) = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_2^2}{1 + \omega^2 T_1^2}}, \quad P(\omega) = \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_1.$$

Рисунок 1 - Траектория фазовой ошибки для ФАП второго порядка

2. Анализ стохастической системы ФАП второго порядка

Запишем уравнение ФПК в виде

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [h(x)W(x,t)] + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где $h(x) = g(x) - \beta$; $r = D^{-1}$.

В установившемся режиме, полагая $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$, по (2) получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 W(x)}{dx^2} + r \frac{d}{dx} [h(x)W(x)] = 0 \quad (3)$$

с граничным условием $W(\pi, t) = W(-\pi, t)$.

ДУ (2) запишем в виде

$$\frac{dW}{dx} + rh(x)W(x) = -\Pi(x) = \Pi_0; \quad \Pi_0 = \text{const}. \quad (4)$$

По определению $\Pi(x)$ – поток вероятности, а условие $\Pi_0 = \text{const}$ означает стационарность потока вероятности. Решение ДУ имеет вид

$$W(x) = e^{-rH(x)} \left[C_1 + \int_0^x \Pi_0 e^{rH(u)} du \right],$$

где $H(x) = \int_0^x h(x)dx = G(x) - \beta x$; $G(x) = \int_0^x g(x)dx$.

Постоянные C_1 и Π_0 найдем из условий

$$W(x_1^+) = W(x_1^-); \quad \int_{x_1^-}^{x_1^+} W(x)dx = 1,$$

где границы x_1^- и x_1^+ интервала $[x_1^-, x_1^+]$ таковы, что $x_1^+ - x_1^- = 2\pi$.

В результате получим

$$W(x_1^+) = e^{-rH(x_1^+)} \left[C_1 + \Pi_0 \int_0^{x_1^+} y^{rH(u)} du \right],$$

$$W(x_1^-) = e^{-rH(x_1^-)} \left[C_1 + \Pi_0 \int_0^{x_1^-} y^{rH(u)} du \right].$$

Из условия равенства $W(x_1^+) = W(x_1^-)$ выразим C_1 через Π_0 , т.е.

$$C_1 = \Pi_0 \alpha^{-1} \gamma,$$

где $\alpha = e^{-rH(x_1^+)} - e^{-rH(x_1^-)}$; $\gamma = e^{-rH(x_1^-)} \int_0^{x_1^-} e^{rH(u)} du - e^{-rH(x_1^+)} \int_0^{x_1^+} e^{rH(u)} du$.

Таким образом, ПРВ $W(x)$ можно записать в виде

$$W(x) = C \left[W^{(1)}(x) + W^{(2)}(x) \right]; \quad C^{-1} = \int_{x_1^-}^{x_1^+} \left[W^{(1)}(x) + W^{(2)}(x) \right] dx,$$

где $C = \Pi_0 / \alpha$; $W^{(1)}(x) = \exp \left[- \int_x^{x_1^+} rh(u) du \right] \int_{x_1^+}^x \exp \left[\int_0^u rh(v) dv \right] du$;

$$W^{(2)}(x) = \exp \left[- \int_{x_1^-}^x rh(u) du \right] \int_{x_1^-}^x \exp \left[\int_0^u rh(v) dv \right] du.$$

Отсюда при $x_1^- = -\pi$; $x_1^+ = \pi$ после преобразования находим

$$W(x) = A(v, r) e^{vx - rG(x)} \int_x^{x+2\pi} e^{-vy + rG(u)} dy. \quad (5)$$

Здесь

$$A^{-1}(v, r) = I_B = \int_{-\pi}^{\pi} e^{vx - rG(x)} \left[\int_x^{x+2\pi} e^{-vy + rG(y)} dy \right] dx, \quad (6)$$

где $G(x) = \int_0^x g(u) du$; $v = \beta r$; $g(x) = \sin(x)$.

На рис. 2а представлен график зависимости ПРВ $W(x)$ ФАП второго порядка, рассчитанной по формуле (5) при $r=16$ и разных значениях β : 1 - $\beta=0.2$; 2 - $\beta=0.4$; 3 - $\beta=0.6$; 4 - $\beta=0.8$; 5 - $\beta=0.9$; 6 - $\beta=1$. На рис. 2б: 1 - $\beta=-0.4$; 2 - $\beta=0.4$; 3 - $\beta=-0.6$; 4 - $\beta=0.6$; 5 - $\beta=-0.8$; 6 - $\beta=0.8$.

Рисунок 2 – ПРВ $W(x)$: а) ФАП второго порядка; б) ФАП первого порядка при $r=8$;

$d=1,5$; $\varepsilon=0,4$.

$$P(\omega) = \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_1, \quad F(\omega) = \frac{1 + j\omega T_2}{1 + j\omega T_1}, \quad |F_3(\omega)| = M(\omega) = \sqrt{\frac{1 + (\omega T_2)^2}{1 + (\omega T_1)^2}}.$$

Среднее время до срыва слежения имеет вид [7]

$$T_c(r) = \exp(rH\varphi), \quad (7)$$

$$\text{где } H = \frac{3}{2} \frac{\pi}{M} H_b, \quad H_b = (1 - \beta c_0)^2, \quad \varphi = \frac{(c_0 + \frac{M}{\pi} \varepsilon_0^2)}{(1 + 2\varepsilon_0 \lambda)}.$$

На рис. 3а построен график зависимости $\gamma_c(r)$ от ОСШ ФАП второго порядка, рассчитанный по (7) при разных значениях a : 1 - $a=0.2$; 2 - $a=0.4$; 3 - $a=0.6$; 4 - $a=0.8$. На рис. 3б построен график зависимости $\gamma_c(r)$ ФАП первого порядка: 1 - $\beta=0.4$; 2 - $\beta=0.6$; 3 - $\beta=0.8$; 4 - $\beta=0.9$.

Рисунок 3 – Зависимость среднего времени до срыва слежения $\gamma_c(r)$ от ОСШ:

а) ФАП второго порядка при $\beta = 0.8$; б) ФАП первого порядка при $d=1.5$, $\varepsilon = 0.3$

Найдем среднее значение частотного рассогласования. Можно показать, что справедливо соотношение [7]

$$\beta_c(r) = \frac{2\pi}{\gamma_c(r)} th(\pi v), \quad (8)$$

где $\beta_c = \omega_c / \Omega$, ω_c - среднее значение частотного рассогласования между частотой сигнала и частотой управляемого генератора.

На рис. 4 а,б даны графики зависимостей $\beta_c(r)$ ФАП второго и первого порядка при $\beta = \text{var}$. На рис. 4а: 1 - $\beta=0.2$; 2 - $\beta=0.4$; 3 - $\beta=0.6$; 4 - $\beta=0.8$; 5 - $\beta=0.9$. На рис. 4б: 1 - $\beta=0$; 2 - $\beta=0.2$; 3 - $\beta=0.4$; 4 - $\beta=0.6$.

Рисунок 4 – Зависимость частотной расстройки $\beta_c(r)$ от ОСШ r : а) ФАП второго порядка; б) ФАП первого порядка при $d=0,5, \varepsilon=0,5$.

По результатам анализа графиков можно сделать следующие выводы.

- 1) При увеличении значения частотной расстройки β значение ПРВ $W(x)$ уменьшается. Для ФАП первого порядка эта тенденция более выражена, чем для ФАП второго порядка.
- 2) С ростом значения частотной расстройки β уменьшается значение среднего времени до срыва слежения $\gamma_c(r)$ для всех значений ОСШ. Для ФАП второго порядка эта тенденция более выражена, чем для ФАП первого порядка.
- 3) Увеличение значения частотной расстройки β приводит к росту среднего значения частотного рассогласования $\beta_c(r)$. Для ФАП второго порядка эта тенденция более выражена, чем для ФАП первого порядка.

Список литературы

1. Тихонов В.И. Влияние шумов на работу схемы фазовой автоподстройки частоты // Автоматика и телемеханика. 1959. № 9. С. 1188-1196.
2. Шахтарин Б.И. Анализ асимптотических значений статистических характеристик системы ФАПЧ // Радиотехника и электроника. 1986. № 2. С. 246-258.
3. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении: Пер. с англ. / Под ред. Ю.Н. Бакаева и М.В. Капранова. М.: Сов. Радио, 1978. 600 с.
4. Шахтарин Б.И. Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998. 488 с.
5. Karsi M.F., Lindsey W.C. Effects of CW interference on carrier tracking // Proc. of the Military Communications Conference MILCOM '94. IEEE, 1994. P. 301-305. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/MILCOM.1994.473923>
6. Ковальчук А. А., Сидоркина Ю. А., Рязанова М. А. Воздействие на систему синхронизации гармонических помех и шума // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 3. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/169529.html> (дата обращения 19.10.2012).
7. Шахтарин Б.И. Анализ систем синхронизации при наличии помех. М.: ИПРЖР, 1996. 252 с.

Effects on second order phase lock of harmonic interference and additive noise

09, September 2012

DOI: 10.7463/0912.0475444

Kovalchuk A.A.

Russia, Bauman Moscow State Technical University
nastia_kov-k@rambler.ru

The author analyzes statistical dynamics of continuous phase lock systems of second order in the presence of combined interventions. On the basis of the Markov unit of random processes (Fokker-Planck-Kolmogorov equation), by using various approximations, the author obtained statistical properties of the phase-locked loop of second order. In the first place, this is probability density (PD) of the error signal, frequency of skips, as well as the mean difference between the oscillations of the controlled oscillator and the signal at the input of the combined action of phase lock as an additive mixture of signal, the sum of several harmonic noises and Gaussian noise. The author provides a comparison of characteristics of the phase locks of the 1st and 2nd order.

Publications with keywords:[the frequency mismatch](#), [tracking failure](#), [harmonic interference](#), [probability density function](#), [second order PLL](#), [additive noise](#), [the band synchronization](#)
Publications with words:[the frequency mismatch](#), [tracking failure](#), [harmonic interference](#), [probability density function](#), [second order PLL](#), [additive noise](#), [the band synchronization](#)

References

1. Tikhonov V.I. Vliianie шумов на работу схемы фазовой автостроики частоты [Effects of noise on the circuit of the phase-locked loop]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automatics and telemechanics], 1959, no. 9, pp. 1188-1196.
2. Shakhtarin B.I. Analiz asimptoticheskikh znachenii statisticheskikh kharakteristik sistemy FAPCh [Analysis of the asymptotic values of the statistical characteristics of the PLL system]. *Radiotekhnika i elektronika* [Radiotechnics and electronics], 1986, no. 2, pp. 246-258.
3. Lindsey W.C. *Synchronization systems in communication and control*. New Jersey, Englewood Cliffs, Prentice-Hall Inc., 1972. 599 p. (Russ. ed.: Lindsei V. *Sistemy sinkhronizatsii v svyazi i upravlenii*. Moscow, Sovetskoe radio, 1978. 600 p.).
4. Shakhtarin B.I. *Statisticheskaya dinamika sistem sinkhronizatsii* [Statistical dynamics of the systems of synchronization]. Moscow, Radioisviaz', 1998. 488 p

5. Karsi M.F., Lindsey W.C. Effects of CW interference on carrier tracking. *Proc. of the Military Communications Conference MILCOM '94*. IEEE, 1994, pp. 301-305. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/MILCOM.1994.473923>
6. Koval'chuk A. A., Sidorkina Iu. A., Riazanova M. A. Vozdeistvie na sistemu sinkhronizatsii garmonicheskikh pomekh i shuma [Affecting system of synchronization of harmonic hindrances and noise]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 3. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/169529.html> , accessed 19.10.2012.
7. Shakhtarin B.I. *Analiz sistem sinkhronizatsii pri nalichii pomekh* [Analysis of the systems of synchronization at presence of noise]. Moscow, IPRZhR Publ., 1996. 252 p.