Статистические характеристики дискретных систем фазовой синхронизации

08, август 2012

DOI: 10.7463/0812.0475421

Ковальчук А. А.

УДК: 621.396.662

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

nastia_kov-k@rambler.ru

Введение

Теория стохастических систем фазовой автоподстройки (ФАП) начала формироваться работами Р.Л. Стратоновича [1] и В.И. Тихонова. Одним из основных методов исследования является метод марковских и полумарковских случайных процессов и цепей, разработанные А.Н. Колмогоровым и Л.С. Понтрягиным [2]; применяются интегральное уравнение Колмогорова-Чепмена и уравнение среднего времени до срыва синхронизации (работы Ч. Цзы [3], А. Вайнберг и В. Ли [4], В.И. Витюцкого и В.Н. Сердюкова [5]). В указанных работах найдены плотности распределения вероятности (ПРВ) координат, в меньшей степени исследованы характеристики срыва слежения, причем рассмотрены детерминированные системы, и не проводится анализ стохастической системы. Так же среди систем ФАП особое внимание уделяется непрерывным системам [6], а статистические характеристики дискретных ФАП до сих пор исследованы в меньшей степени, отчасти в силу многообразия дискретных систем.

В данной статье приводится анализ стохастической дискретной ФАП при синусоидальной характеристики детектора. Приводятся зависимости стационарных ПРВ при нулевой частотной расстройке, рассчитанные методом Галеркина. Приведен приближенный метод вычисления ПРВ на основе метода Галёркина. Сопоставлены результаты точных и приближенных методов. Делается вывод о том, что система алгебраических уравнений, полученная методом расщепления ядра интегрального уравнения, имеет тот же вид, что и система, полученная методом Галёркина. Приводятся графики нестационарной ПРВ при равномерном начальном распределении. Исследованы моменты времени до срыва слежения в дискретной ФАП. Приводятся зависимости среднего значения времени до срыва слежения

от отношения сигнал/шум. В результате показаны основные статистические характеристики плотности вероятностей фазового рассогласования в стационарном и нестационарном режимах работы, времени до срыва слежения в импульсных фазовых системах.

1. Анализ стохастической дискретной ФАП при синусоидальной характеристике детектора

Рассмотрим статистическую динамику дискретной ФАП при синусоидальной характеристике детектора $g(x) = \sin x$. Разностное уравнение ФАП в этом случае принимает вид

$$x_{k+1} = x_k - T_0(\sin x_k - \beta) + \tilde{n}_k, \quad (1)$$

причем среднее значение равно

$$E(x_{k+1} | x_k) = E(x_{k+1} | z) = z - T_0(\sin z - \beta),$$

где T_0 - период, β - частотная растрейка, $\tilde{n}_k$ - гауссова последовательность.

Уравнение Колмогорова-Чепмена запишем в виде [7]

$$W_{m+1} = \int_{-\pi}^{\pi} q_1(x|z) W_m(z) dz, \quad (2)$$

где

$$q_1(x|z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(x + 2\pi n | z); \quad q(x|z) = \left(1/\sqrt{2\pi\sigma^2}\right) \exp\{-[x - z + T_0(\sin z - \beta)]^2 / 2\sigma^2\}.$$

В стационарном режиме уравнение Колмогорова-Чепмена переходит в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$W(x) = \int_{-\pi}^{\pi} q(x|z) W(z) dz.$$

Предположим, что, как и в случае непрерывной системы при $\beta = 0$, сигнал рассогласования в стационарном режиме распределен по закону Тихонова [8] при $r = \rho$, где $\rho = r_0(1 - T_0/2)$. Тогда

$$W(x) = \frac{1}{2\pi I_0(\rho)} e^{\rho \cos x} = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (3)$$

где $a_n = \pi I_0(\rho) I_n(\rho)$; $I_n(\rho)$ - функция Бесселя.

Рассмотрим влияние интервала дискретизации сигнала на плотность распределения вероятности (ПРВ) $W(x)$. Вычисление интеграла в правой части уравнения Колмогорова-Чепмена проведем при $T_0 = 0,5$ и $T_0 = 1$. Для сравнения с [7] составим перечень значений

отношения сигнал/шум $r = \alpha_i = \sigma_n^2 / A^2$, где $\sigma_n^2 = \sigma^2 / T_0$. Пусть $T_0 = 0,5$; тогда значениям $\alpha_i = 3; 1; 0,6; 0,2$ соответствуют $\rho = 1; 3; 5; 15$ и $r = 4/3; 4; 20/3; 20$. При $T_0 = 1$ для тех же значений α_i имеем $\rho = 1/3 (1); 1 (2); 5/3 (3); 5 (4)$ и $r = 2/3; 2; 10/3; 10$ (рис. 1).

Рисунок 1 – Стационарная ПРВ $W(x)$ при $\beta = 0$ и различных значениях T_0

Результаты сравнения видны на рис.1 а-в, где приведены зависимости стационарных ПРВ W от x при $\beta = 0$ и значениях T_0 , равных 0,1; 0,5; 1. Сплошными линиями обозначены

результаты расчета методом Галеркина, штриховыми линиями – ПРВ $W(x)$ (3) непрерывной системы.

2. Вычисление статистических характеристик ФАП приближенным методом

Рассмотрим приближенный метод вычисления ПРВ $W(x)$ на основе метода Галёркина [8]. Пусть

$$W(x) \approx W_N(x), \quad W_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n(N) \psi_n(x),$$

где $\{\psi_n(x)\} (n=0, 1, \dots)$ – полная система ортогональных на интервале $(-\pi, \pi)$ функций.

Точное значение ПРВ находим в форме предельного соотношения

$$W(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} W_N(x).$$

Тогда

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx), \quad (4)$$

где $c_n = \lim_{N \rightarrow \infty} c_n(N)$, A_n , B_n – расчетные коэффициенты.

Приведенные соотношения для коэффициентов ряда (4) могут быть получены методом замены ядра интегрального уравнения Колмогорова-Чепмена на вырожденное разложение ядра $q_1(x|z)$ в двойной ряд Фурье.

Рассмотрим анализ нестационарного режима методом Галёркина. Плотность распределения вероятности

$$W_k(x) = W_k(x|x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N d_n(k) \psi_n(x),$$

где x_0 – начальное значение фазового рассогласования.

Согласно уравнения Колмогорова-Чепмена и условию $W_0(x) = \delta(x - x_0)$ имеем

$$W_1(x|x_0) = q(x|z - x_0). \text{ Отсюда } W_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(1) \psi_n(x).$$

Подставляя ряд для функции $q_1(x|z)$ в интегральное уравнение (2), получаем выражение

$$W_{m+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(m+1) \cos kx + B_k(m+1) \sin kx,$$

где

$$\begin{aligned} A_k(m+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} \int_{-\pi}^{\pi} W_m(z) \cos nz dz + c_{nk} \int_{-\pi}^{\pi} W_m(z) \sin nz dz, \\ B_k(m+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{nk} \int_{-\pi}^{\pi} W_m(z) \cos nz dz + d_{nk} \int_{-\pi}^{\pi} W_m(z) \sin nz dz. \end{aligned} \quad (5)$$

В частном случае $\beta = 0$ выражение для стационарной ПРВ сигнала рассогласования в дискретной системе принимает вид

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx. \quad (6)$$

Ограничимся первым слагаемым ряда (6). Тогда

$$A_1 = \frac{1}{\pi} e^{-\sigma^2/2} \frac{J_1 T_0}{1 - (2/T_0) e^{-\sigma^2/2} J_1 T_0}.$$

Результаты расчета ПРВ $W(x)$ приведены сплошными линиями на рис. 1 а-в. На рис. 2 и рис. 4 изображены графики при $\beta \neq 0$. На рис. 2 изображены графики ПРВ при $\beta = 0,4$, $\rho = 4$; $T_0 = 0(1)$; $T_0 = 0,5$ (2); $T_0 = 0,1$ (3); штриховой линией отмечена ПРВ для непрерывной системы. На рис. 3 изображены графики нестационарной ПРВ при равномерном начальном распределении $W_0(x) = 1/2\pi$, когда $\beta = 0$, $\rho = 4$, $T_0 = 1$; $t=1$ (1), $t=2$ (2), $t=4$ (3), $t=10$ (4); штриховой линией отмечена ПРВ для непрерывной системы. На рис. 4 а,б принято, что $\rho = 0,3$ (1); $\rho = 1$ (2); $\rho = 3$ (3); $\rho = 5$ (4). На рис. 4 а: $\beta = 0,5$; $T_0 = 0,1$; на рис. 4 б: $\beta = 0,5$; $T_0 = 0,5$.

Рисунок 2 - Стационарная
ПРВ $W(x)$ при $\beta = 0,4$; $\rho = 4$

Рисунок 3 - Нестационарная ПРВ
при равномерном начальном распределении

а) $T_0 = 0,1$

б) $T_0 = 0,5$

Рисунок 4 – ПРВ $W(x)$ при $\beta \neq 0$

3. Моменты времени до срыва слежения в дискретной ФАП

Для вероятности срыва слежения на i -м шаге можно записать [9] в виде

$$d_i(x_0) = \int_{-s}^s q(x|x_0) d_{i-1}(x) dx; \quad d_1(x_0) = 1 - \int_{-s}^s q(x|x_0) dx. \quad (7)$$

Определим k -й начальный момент числа шагов до срыва синхронизации ($s = 2\pi$)

$$m_k(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} i^k d_i(x_0) = 1 + \int_{-s}^s q(x|x_0) \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} [i^k d_{i-1}(x)] - 1 \right\} dx.$$

Получаем рекуррентные соотношения для начальных моментов числа шагов до срыва синхронизации

$$m_k(x_0) = 1 + \int_{-s}^s m_k q(x|x_0) dx + \sum_{i=2}^{\infty} C_k^i \tilde{m}_{k-i}(x_0), \quad (8)$$

где C_k^i - биномиальный коэффициент, $\tilde{m}_n(x_0) = m_n(x_0) - 1 - \sum_{i=1}^{n-1} C_k^i \tilde{m}_{k-i}(x_0)$.

Для решения интегрального уравнения (8) использовался метод квадратур, основанный на использовании формулы Гаусса для приближенного вычисления определенного интеграла.

На рис. 5 приведены зависимости среднего значения времени $\gamma_c = m_1 T_0$ до срыва слежения при $x_0 = 0$, $\beta = 0$ и различных значениях ρ и T_0 : (1) - $T_0 = 0$; (2) - $T_0 = 0,1$; (3) - $T_0 = 0,5$; (4) - $T_0 = 1$ (штриховой линией отмечены данные из [10]).

Рисунок 5 - Среднее значение времени до срыва слежения $\gamma_c(\rho)$ при $x_0 = 0$; $\beta = 0$

Заключение

Проведен анализ стохастической дискретной ФАП при синусоидальной характеристики детектора. Приведены зависимости стационарных ПРВ $W(x)$ при $\beta = 0$, рассчитанные методом Галеркина. Рассмотрен приближенный метод вычисления ПРВ $W(x)$

на основе метода Галёркина. Сделан вывод о том, что система алгебраических уравнений, полученная методом расщепления ядра интегрального уравнения, имеет тот же вид, что и система, полученная методом Галёркина. Приведены графики нестационарной ПРВ при равномерном начальном распределении $W_0(x)$. Исследованы моменты времени до срыва слежения в дискретной ФАП. Приведены зависимости среднего значения времени до срыва слежения γ_c от ρ .

Список литературы

1. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961. 210 с.
2. Андронов В.А., Витт А.А., Понтрягин Л.С. О статистическом рассмотрении динамических систем // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики (ЖЭТФ). 1933. Т. 3, № 3. С. 165-180.
3. Chie C.M. Mathematical analogies between first-order digital and analog phase-locked loops // IEEE Trans. on Communications. 1978. Vol. COM-26, № 6. P. 860-865. DOI: [10.1109/TCOM.1978.1094148](https://doi.org/10.1109/TCOM.1978.1094148)
4. Weinberg A., Liu B. Discrete time analysis of nonuniform sampling first- and second-order phase-locked loops // IEEE Trans. on Communications, 1974. Vol. COM-22, № 2. P. 123-137. DOI: [10.1109/TCOM.1974.1092168](https://doi.org/10.1109/TCOM.1974.1092168)
5. Битюцкий В.И., Сердюков П.Н. Оценка времени до срыва синхронизма в импульсной системе ФАПЧ // Радиотехника. 1973. № 8. С. 95-97.
6. Ковальчук А. А., Сидоркина Ю. А., Рязанова М. А. Воздействие на систему синхронизации гармонических помех и шума // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 3. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/169529.html> (дата обращения 19.10.2012).
7. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 695 с.
8. Шахтарин Б.И. Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием. М.: Машиностроение, 1990. 192 с.
9. Шахтарин Б.И., Сизых В.В., Курочка Б.Я. Исследование статистических характеристик дискретных ФАС первого порядка // Вестник МГТУ. Сер. Приборостроение. 1992. №3. С. 89-110.
10. Первозванский А.А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М.: Наука, 1962. 352 с.

Statistical characteristics of discrete systems of phase locking

08, August 2012

DOI: 10.7463/0812.0475421

Kovalchuk A.A.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

nastia_kov-k@rambler.ru

This paper provides statistical characteristics of discrete systems of first-order phase locking in the absence of noise, in contrast to most other studies which consider deterministic systems. One of the main research methods is the method of Markov and semi-Markov random processes and circuits developed by A.N. Kolmogorov and L.S. Pontryagin. The theory of stochastic systems of phase locking first emerged in works by R.L. Stratonovich and V.I. Tikhonov. Among the phase locking systems the main focus is on continuous systems whereas statistical characteristics of discrete phase locking have been studied to a lesser extent, partly because of diversity of discrete systems. The author gives an analysis of stochastic discrete phase locking with sinusoidal characteristics of the detector. The results of exact and approximate methods were compared for the first time. As a result, the main statistical characteristics were obtained: probability density of phase mismatch in the stationary and nonstationary modes, time left till tracking loss in pulse phase systems.

Publications with keywords:[tracking failure](#), [discrete systems of phase synchronization](#), [a sinusoidal response detector](#), [the probability density of the phase mismatch](#), [the Galerkin method](#), [the failure of the tracking method of Markov random processes](#)

Publications with words:[tracking failure](#), [discrete systems of phase synchronization](#), [a sinusoidal response detector](#), [the probability density of the phase mismatch](#), [the Galerkin method](#), [the failure of the tracking method of Markov random processes](#)

References

1. Stratonovich R.L. *Izbrannye voprosy teorii fluktuatsii v radiotekhnike* [Selected questions of the theory of fluctuations in radio engineering]. Moscow, Sovetskoe radio, 1961. 210 p.
2. Andronov V.A., Vitt A.A., Pontriagin L.S. O statisticheskom rassmotrenii dinamicheskikh system [The statistical analysis of dynamic systems]. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki (ZhETF)* [Journal of Experimental and Theoretical Physics), 1933, vol. 3, no. 3, pp. 165-180.

3. Chie C.M. Mathematical analogies between first-order digital and analog phase-locked loops. *IEEE Trans. on Communications*, 1978, vol. COM-26, no. 6, pp. 860-865. DOI: [10.1109/TCOM.1978.1094148](https://doi.org/10.1109/TCOM.1978.1094148)
4. Weinberg A., Liu B. Discrete time analysis of nonuniform sampling first- and second- order phase-locked loops. *IEEE Trans. on Communications*, 1974, vol. COM-22, no. 2, pp. 123-137. . DOI: [10.1109/TCOM.1974.1092168](https://doi.org/10.1109/TCOM.1974.1092168)
5. Bitiutskii V.I., Serdiukov P.N. Otsenka vremeni do sryva sinkhronizma v impul'snoi sisteme FAPCh [Estimate of the time to stalling of synchronism in pulsed PLL]. *Radiotekhnika*, 1973, no. 8, pp. 95-97.
6. Koval'chuk A. A., Sidorkina Iu. A., Riazanova M. A. Vozdeistvie na sistemu sinkhronizatsii garmonicheskikh pomekh i shuma [Affecting system of synchronization of harmonic hindrances and noise]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 3. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/169529.html> , accessed 19.10.2012.
7. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. Moscow-Leningrad, Gostekhizdat, 1949. 695 p.
8. Shakhtarin B.I. *Analiz kusochno-lineinykh sistem s fazovym regulirovaniem* [Analysis of piecewise linear systems with phase regulation]. Moscow, Mashinostroenie, 1990. 192 p.
9. Shakhtarin B.I., Sizykh V.V., Kurochka B.Ia. Issledovanie statisticheskikh kharakteristik diskretnykh FAS pervogo poriadka [Study of statistical characteristics of the discrete phase automatic systems (FAS) of the first order]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Instrument Engineering], 1992, no. 3, pp. 89-110.
10. Pervozvanskii A.A. *Sluchainyye protsessy v nelineinykh avtomaticheskikh sistemakh* [The random processes in nonlinear automatic systems]. Moscow, Nauka, 1962. 352 p.