О тензорной нелинейности структурно – неоднородных материалов

08, август 2012

DOI: 10.7463/0812.0466666

Комков К. Ф.

УДК 539.3; 539.374

Россия, Балашиха, Военно-технический университет

06kfk38@mail.ru

Введение

Анализ тензорно – нелинейных уравнений, представленных в работах [1] и [2], показал, что с их помощью можно не только найти объяснение эффектам второго порядка (О. Рейнольдса, Р. Ривлина и других), но и точнее отразить внутренние процессы, влияющие на деформационные характеристики материала. Однако это направление механики твердого тела пока не вошло в один ряд с известными классическими теориями. Основное достоинство уравнений В.В. Новожилова [2] состоит в том, что они позволяют явно отражать зависимость деформационных свойств изотропных материалов от вида напряженного состояния. Одной из причин, по которой это направление находится на стадии развития, следует считать отсутствие надежных методик, позволяющих найти связь данной теории с результатами испытаний материалов. Именно решению этой проблемы посвящено настоящее исследование.

Его основной целью явилась разработка методик для определения функций при тензорных аргументах этих уравнений, которые до их определения по результатам испытаний будем называть, как и в [3], материальными функциями, а после – деформационными характеристиками. Эти методики способствуют разработке математических моделей структурно-неоднородных сред с учетом особенностей, выявленных в ходе экспериментальных исследований, в которых показана необходимость применения тензорно – нелинейных уравнений для сред со сложной структурой. Примером таких сред является высоконаполненный полимерный материал (ВНП), тензорная нелинейность которого отчетливо проявляется при целенаправленных испытаниях автора.

Научная новизна результатов исследования заключается в раскрытии физического смысла тензорной нелинейности как эффекта, проявляющегося при деформации твердых тел. Его учет способствует установлению более точной связи девиаторных и шаровых

частей тензоров напряжений и деформаций, на основе которых разработана математическая модель. Работа состоит из введения, четырех глав и заключения. Первая глава посвящена анализу тензорно – нелинейных уравнений, вторая результатам экспериментальных исследований ВНП и их анализу, третья разработке методики восстановления материальных функций и обоснованию достоверности и единственности ее результатов. В четвертой главе дан вывод уравнений для описания эффекта дилатансии (в обобщенном смысле – разрыхления или изменения среднего напряжения при формоизменении), включенных в состав алгоритмов, рассмотренной модели и сопоставление их с результатами испытаний.

1 Анализ тензорно – нелинейных уравнений

Тензорно-нелинейные уравнения М. Рейнера [1] представляют собой связь деформаций с напряжениями

$$\varepsilon_{ij} = \Phi_0 \delta_{ij} + \Phi_1 \sigma_{ij} + \Phi_2 \sigma_{ik} \sigma_{kj} \quad (1)$$

и напряжения с деформациями

$$\sigma_{ij} = F_0 \delta_{ij} + F_1 \varepsilon_{ij} + F_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}, \quad (2)$$

где ε_{ij} , σ_{ij} - компоненты тензора деформаций и напряжений, Φ_α , F_α - скалярные материальные функции при тензорных аргументах; $\alpha = 0, 1, 2$.

Уравнения В.В. Новожилова представлены в работе [2] в виде соотношений связи девиатора деформаций с девиатором напряжений

$$D_\varepsilon = \Phi_\theta \{ (\varphi_m/2) D_\sigma + (\varphi_d/S_0) [D_\sigma^2 - (2/9) S_0^2 I] \} \quad (3)$$

и соотношений связи девиатора напряжений с девиатором деформаций,

$$D_\sigma = 2G_\theta \{ g_m D_\varepsilon - g_d/2 (D_\varepsilon^2 - 1/2 e_0^2 I) / e_0 \}, \quad (4)$$

где $\varphi_m = \sin(2\theta + \vartheta) / \sin 3\theta$, $\varphi_d = 3 \sin(\theta - \vartheta) / (2 \sin 3\theta)$,
 $g_m = \sin(2\vartheta + \theta) / \sin 3\vartheta$, $g_d = 4 \sin(\theta - \vartheta) / \sin 3\vartheta$ - коэффициенты при обобщенных характеристиках: Φ_θ - податливости и G_θ - модуле; I - единичный тензор,

θ и ϑ - углы вида напряженного и деформированного состояний, соответственно. Величины

$$S_0 = (3/2 S_{ij} S_{ij})^{1/2}, \quad e_0 = (2/3 e_{ij} e_{ij})^{1/2} \quad (5)$$

представляют собой интенсивности напряжений и деформаций, S_{ij}, e_{ij} компоненты девиаторов напряжений и деформаций, соответственно.

Уравнения (3) и (4) далее используются с другими обозначениями материальных функций

$$e_{ij} = (\Phi_m/2) S_{ij} + \Phi_d (S_{i\alpha} S_{\alpha j} - 2/9 S_0^2 \delta_{ij}) / S_0, \quad (6)$$

$$S_{ij} = 2G_m e_{ij} - G_d (e_{i\alpha} e_{\alpha j} - 1/2 e_0^2 \delta_{ij}) / e_0. \quad (7)$$

Здесь

$$\Phi_m = \phi_i / 3 = \Phi_\theta \sin(2\theta + \vartheta) / \sin 3\theta, \quad (8)$$

$$\Phi_d = \{[(\phi_j - \phi_\alpha)^2] / 8\}^{1/2} = 3\Phi_\theta \sin(\theta - \vartheta) / (2 \sin 3\theta), \quad (9)$$

$\phi_i = \gamma_i / \tau_i$ - податливости при сдвиге, $\gamma_i = e_j - e_\alpha$ - главные деформации сдвига, а $\tau_i = (\sigma_j - \sigma_\alpha) / 2$ - главные касательные напряжения; $i, j, \alpha = 1, 2, 3; i \neq j \neq \alpha$.

Податливости и модули могут быть представлены в форме произведения: $\phi_i = \Phi_\theta \varphi_i, G_i = G_\theta g_i$. В этих выражениях $\varphi_i = (d_j - d_\alpha) / (c_j - c_\alpha), g_i = 1 / \varphi_i$ - коэффициенты. Для удобства преобразований используются величины: $c_1 = 2 \cos \theta, c_2 = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta, c_3 = -(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta)$. Подобные же величины d_i представляют собой такие же функции угла ϑ .

В уравнениях (6) значения функции Φ_m имеет смысл средней, а Φ_d среднеквадратической податливости формоизменения для всех площадок элементарного объема, в том числе и октаэдрической. После преобразований первых равенств в (8) и (9), используя эти величины, материальные функции $\Phi_m = \Phi_\theta \varphi_m, \Phi_d = \Phi_\theta \varphi_d$ приобретают выражения, которые оказываются тождественными функциям уравнений В.В. Новожилова и придают им соответствующий физический смысл.

Вновь введенные податливости

$$\phi_i = \Phi_m - 2\Phi_d c_i/3, \quad (10)$$

определяются из уравнений (6) для главных деформаций сдвига $\gamma_i = \tau_i(\Phi_m - 2/3\Phi_d c_i)$. Пользуясь определением (5) для деформации ϵ_0 и уравнениями (6), обобщенная податливость принимает выражение

$$\Phi_\theta = [\Phi_m^2 + (4/3)\Phi_m\Phi_d \cos 3\theta + (4/9)\Phi_d^2]^{1/2}, \quad (11)$$

а из вторых равенств соотношений (8) и (9) вытекает выражение для тангенса фазы подобия девиаторов [2]

$$tg\omega = [2\Phi_d \sin 3\theta / (3\Phi_m + 2\Phi_d \cos 3\theta)]. \quad (12)$$

Эта формула показывает, что угол $\omega = \theta - \vartheta$ может быть определен только при наличии функций Φ_m и Φ_d .

Аналогично функциям G_m и G_d в уравнениях (7), после их преобразований к виду

$$G_m = G_i/3 = G_\theta \sin(2\vartheta + \theta) / \sin 3\vartheta, \quad (13)$$

$$G_d = \{(8/9)[(G_j - G_\alpha)^2]\}^{1/2} = 4G_\theta \sin(\theta - \vartheta) / \sin 3\vartheta, \quad (14)$$

где $G_i = \tau_i/\gamma_i = 1/\phi_i$; $i, j, \alpha = 1, 2, 3$; $i \neq j \neq \alpha$,

можно придать смысл среднего $G_m = G_\theta g_m$ и среднеквадратического $G_d = G_\theta g_d$ модулей.

Вновь введенные модули взаимосвязаны соотношениями

$$G_i = G_m + G_d d_i/4, \quad (15)$$

вытекающими из уравнений (7) для напряжений $\tau_i = \gamma_i(G_m + G_d d_i)$.

Пользуясь определением (5) для напряжения S_0 , обобщенный модуль можно выразить через функции G_m и G_d

$$G_{\vartheta} = [G_m^2 - (1/2)G_m G_d \cos 3\vartheta + G_d^2 / 16]^{1/2}, \quad (16)$$

а из вторых равенств соотношений (13) и (14) находится еще одно соотношение для тангенса фазы подобия девиаторов

$$tg\omega = G_d \sin 3\vartheta / (4G_m - G_d \cos 3\vartheta). \quad (17)$$

Из (9) и (14) следует, что среднеквадратическая податливость Φ_d или среднеквадратический модуль G_d не равны нулю, если хотя бы две из трех функций Φ_i или G_i не равны между собой. В случае отсутствия различия в значениях между Φ_i или G_i тензорно-нелинейные уравнения вырождаются в линейные. Результаты преобразований, позволивших найти первые равенства соотношений (9) и (14), впервые изложены в работе [5]. Это различие модулей не является «разномодульностью» [6], поскольку модули G_i относятся к одному и тому же напряженному состоянию. В данном случае различие Φ_i или G_i в разных направлениях указывает на наличие анизотропии среды, которая до деформации была изотропной.

Термин «деформационная анизотропия» уже закрепился в теории пластичности как явление, сопровождающее пластическую деформацию после разгрузки [2]. Предлагается далее эффект анизотропии, возникающий в процессе пропорционального нагружения, называть «тензорной нелинейностью». Такой термин уже вошел в теорию вязких жидкостей при описании их течения тензорно - нелинейными уравнениями [3, 4]. Следует ожидать, что исследования деформации высоконаполненных полимеров внесут полезный вклад в анализ явлений типа эффекта Вайссенберга [4]. Количественную оценку степени тензорной нелинейности можно проводить по значениям коэффициентов $g_d = G_d/G_{\vartheta}$ или $\varphi_d = \Phi_d/\Phi_{\vartheta} = 8g_d/3$, которые названы параметрами тензорной нелинейности.

Первые проявления тензорной нелинейности, обнаружили при испытаниях (например, в [8]), по отсутствию равенства отношений $\tau_i/\gamma_i \neq \tau_j/\gamma_j$, $i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$. В дальнейшем при изучении вопроса о подобии девиаторов S_{ij} и e_{ij} появилась необходимость определения связи между углами θ и ϑ или между параметрами Лоде $\lambda_{\sigma} = -2\tau_1/\tau_2 - 1$ и $\lambda_{\varepsilon} = -2\gamma_1/\gamma_2 - 1$, которая может быть найдена только при наличии среднеквадратических характеристик Φ_d или G_d .

Действительно, если воспользоваться уравнениями в форме (6) для главных деформаций сдвига γ_i , можно найти аналитическую зависимость между параметрами Лоде

$$\lambda_{\varepsilon} = (\lambda_{\sigma} + 1)(3\Phi_m - 2\Phi_d c_1)/(3\Phi_m - 2\Phi_d c_2) - 1. \quad (18)$$

Для определения формы диаграммы Лоде удобно пользоваться величиной, представляющей собой разницу параметров

$$\Delta\lambda = \lambda_{\sigma} - \lambda_{\varepsilon} = 2(\lambda_{\sigma} + 1)\Phi_d(c_1 - c_2)/(3\Phi_m - 2\Phi_d c_2) \geq 0. \quad (19)$$

Анализ выражения (19) показывает, что эта величина больше нуля при всех углах θ , кроме $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$, где она принимает нулевое значение, а график диаграммы Лоде имеет форму вогнутой кривой, находящейся ниже прямой $\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\sigma}$.

Эту величину, исходя из определений λ_{σ} и λ_{ε} , можно представить в виде дроби

$$\Delta\lambda = (\tau_2\gamma_1 - \tau_1\gamma_2)/(\tau_2\gamma_2/2) = \Delta A/A_{\tau} \geq 0. \quad (20)$$

Преобразование соотношения (12) для тангенса фазы подобия девиаторов так же приводит к виду, аналогичному (20)

$$\operatorname{tg} \omega = \Delta A/A_{\omega} \geq 0, \quad (21)$$

с тем же числителем. Соотношения (20) и (21) указывают на связь $\Delta\lambda$ и ω . Знаменатели A_{τ}, A_{ω} в них имеют размерность работы, а числитель равен работе касательных напряжений на взаимных деформациях, которая в общем случае отличается от нуля и связана с отклонением от принципа взаимности работ. Из этих соотношений следует достаточно общий вывод, что процесс деформирования, сопровождающийся нарушением подобия девиаторов, является нелинейным. Этот вывод можно найти в работах [7, 9].

2 Экспериментальные исследования ВНП и анализ их результатов

Главной целью исследований явился поиск особенностей в поведении материала. Вследствие низкой жесткости ВНП испытания трубчатых образцов из него являются практически невозможными. Поэтому поиск методов исследований ограничивался испытаниями при простых напряженных состояниях. В работе [10] представлено краткое описание оснастки вместе с датчиками и приборами для испытаний образцов ВНП на растяжение, сжатие, сдвиг, растяжение в dilatометре и на объемное сжатие. Основными результатами являются диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ и графики $v \sim \varepsilon$ - для растяжения и сжатия, где

ν коэффициент поперечной деформации, ϵ - продольная деформация. Возможность установить по результатам испытаний начальные значения коэффициентов поперечных деформаций отсутствовала, поскольку они превышали значения для наполненной сажей резины, а иногда превышали значение числа 0,5. Поэтому потребовались испытания на сдвиг и объемное сжатие для определения модуля упругости μ по диаграмме $\tau \sim \gamma$ и модуля K по кривой $p \sim \Delta V/V$.

Для изотропного материала условие $\nu_{12} > 0,5$ равнозначно утверждению, что деформация растяжения сопровождается уменьшением объема образца. Чтобы убедиться в отсутствии этого явления, потребовались испытания с измерением объемной деформации с помощью дилатометра, специально изготовленного с этой целью. В результате испытаний получена зависимость объемной деформации ϵ_0 от продольной деформации ϵ при растяжении. Уменьшение объема образца при растяжении не проявлялось. Уровень жидкости в измерительной трубке оставался неизменным до $\epsilon \sim 0,6\%$, затем после $\epsilon > 2\%$, с возрастающей скоростью поднимался, что свидетельствовало о процессе разрыхления. Эти измерения позволили получить кривую для коэффициента поперечной деформации. Отклонение этого коэффициента от значения 0,5 при сжатии объясняется разрыхлением, а при растяжении при деформации $\epsilon < 1\%$ - существенной неоднородностью материала.

Исследования выявили ряд особенностей: заметное расхождение начальных значений модулей упругости E_1 при растяжении и E_3 при сжатии, что указывало на наличие начальной разномодульности. Одной из основных причин такого поведения следует считать реакцию подобных материалов на знак среднего напряжения. Кроме того, начальные значения модулей упругости при сдвиге и объемной деформации различаются для исследуемого ВНП примерно на два порядка.

Эти особенности и трудности принятия значений для начальных коэффициентов поперечных деформаций ν_{12} и ν_{31} показывали, что формулами линейной теории упругости, связывающих основные константы, невозможно воспользоваться. Проявилась необходимость согласования начальных упругих характеристик с учетом этих особенностей. Анализ показал, что уравнения (6) можно привести к виду, характерному для уравнений, описывающих деформацию анизотропного тела [11], а именно

$$\epsilon_i = a_{ij}\sigma_j, \quad (22)$$

где

$$a_{ii} = E_i^{-1} = (\phi_k + 3\phi_m + \phi_d c_{ii})/9, \quad (23)$$

$$a_{ij} = -v_{ij}E_i^{-1} = -(3\Phi_m/2 - \Phi_k - \Phi_d c_{ij})/9, \quad (24)$$

$c_{ii} = c_i(1 + \alpha)$, $c_{ij} = c_\alpha + \alpha c_i$, $i, j, \alpha = 1, 2, 3$; $i \neq j \neq \alpha$, E_i - модули упругости в направлении главных напряжений, а v_{ij} - коэффициенты поперечной деформации, $\kappa = 0 \div 1$ - параметр дилатансии. Если принять исходные характеристики по испытаниям на растяжение $E_1 = \sigma_1/\varepsilon_1$, сжатие $E_3 = \sigma_3/\varepsilon_3$, сдвиг $\mu = \tau/\gamma$ и объемное сжатие $K = \sigma_0/3\varepsilon_0$, то полученные соотношения (23) и (24) позволяют представить технические характеристики с учетом начальной разномодульности

$$\alpha = \mu(E_3 - E_1)/12E_1E_3, \quad E = 2E_1E_3/(E_1 + E_3), \quad (25)$$

$$v_{12} = [3K(1 + 2\alpha) - 2\mu]/\{2[3K(1 + 2\alpha) + \mu]\}, \quad (26)$$

$$v_{31} = [3K(1 - 2\alpha) - 2\mu]/\{2[3K(1 - 2\alpha) + \mu]\}, \quad (27)$$

где E, μ, K - модули упругости до деформации изотропной среды.

Формулы (25), (26) и (27) получены после введения в рассмотрение параметра α , представляющего начальное расхождение модулей и коэффициентов поперечных деформаций. Считая значения модулей μ и K фиксированными, уточняются модули при растяжении и сжатии

$$E_1 = 9K\mu/\{2[3K(1 + 2\alpha) + \mu]\}, \quad E_3 = 9K\mu/\{2[3K(1 - 2\alpha) + \mu]\}. \quad (28)$$

Полученные соотношения (25) ÷ (28) представляют простейшую модель на основе тензорно – нелинейных уравнений, которая позволила связать все начальные упругие характеристики и показала, что разномодульность следует отнести к частному случаю эффекта тензорной нелинейности.

3 Методика восстановления материальных функций

Испытания образцов из ВНП позволили по трем напряженным состояниям: растяжения, сдвига и сжатия получить диаграммы в координатах «интенсивность напряжений - интенсивность деформаций», $S_0 \sim e_0$, которые приведены на рис. 1. Они в

дальнейшем называются базовыми диаграммами. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют сжатию, чистому сдвигу и растяжению.

Рис. 1. Начальные участки диаграмм $S_0 \sim e_0$ ВНП:
кривая 1 - при сжатии, 2 - сдвиге, 3 - растяжении.

Назначение методики является восстановление материальных функций и установление связи изложенной теории с результатами экспериментальных исследований с учетом выводов. Она представляет собой более проработанный вариант, по сравнению с ранее описанным в [12], и использует так же процедуру разбивки оси e_0 на $15 \div 20$ отрезков с равным шагом. Для каждого значения деформации e_{0j} по экспериментальным кривым определялись напряжения S_{0j} и податливости $\Phi_\theta = 3e_0/S_0$. Анализ соотношения (10) для податливостей Φ_i позволил принять равенства: $\Phi_1 \approx \Phi_c$, $\Phi_2 \approx \Phi_\tau$, $\Phi_3 \approx \Phi_p$. При установлении этих равенств используется еще соотношение (11), которое для состояний $\theta = 0$, $\theta = \pi/6$ и $\theta = \pi/3$ принимает вид $\Phi_\theta = \Phi_m \pm 2\Phi_d/3$. Индекс j далее опускается.

На первом этапе вычисления средней Φ_m (8) и среднеквадратической податливости Φ_d (9), можно не уточнять индекс податливостей Φ_i . Предполагая существование напряженного состояния, в котором податливостями в направлении главных касательных напряжений являются данные при $j = \text{const}$, для вычислений значений этих характеристик использовались формулы $\Phi_{mcp} = \Phi_{ij}/3$ и

$$\Phi_{dcp} = \{[(\Phi_c - \Phi_\tau)^2 + (\Phi_\tau - \Phi_p)^2 + (\Phi_p - \Phi_c)^2]/8\}^{1/2}. \quad (29)$$

По этим значениям определяются $tg\omega$ (12) и угол вида деформированного состояния $\vartheta = \theta - \omega$ уже для любого угла θ .

Найденные выше равенства позволяют найти обобщенную податливость при любом значении θ по соотношению

$$\Phi_{\theta} = a_1 + a_2 \cos 3\theta + a_3 (\cos 3\theta)^2, \quad (30)$$

которое с помощью коэффициентов $a_1 = \Phi_{\tau}$, $a_2 = (\Phi_p - \Phi_c)/2$, $a_3 = (\Phi_c + \Phi_p - 2\Phi_{\tau})/2$ распределяет положение податливостей Φ_p , Φ_{τ} и Φ_c по своим значениям угла θ .

На втором этапе, располагая значениями Φ_{θ} , углами θ и ϑ , появляется возможность найти все характеристики по их определениям (в тригонометрическом виде). А именно: среднюю Φ_m (8) и среднеквадратичную податливость Φ_d (9), а также среднюю жесткость G_m (13) и среднеквадратичную жесткость G_d (14). А затем, повторяя определение угла фазы подобия девиаторов (17) и угла ϑ , уточняются их значения. Результаты расчетов по описанной методике иллюстрируются на рис. 2 графиками для характеристик формоизменения с множителями $\Phi_m * \mu$, G_m/μ , $\Phi_d * 5\mu$, $5G_d/\mu$ и $tg\omega * 7,5$.

Кривая 1 представляет среднюю податливость Φ_m , которая, как следует из поведения базовых диаграмм, возрастает. Примерно так же ведет себя среднеквадратическая податливость Φ_d - кривая 4. Кривая 2 дает представление о среднем модуле G_m , который плавно снижается. Поведение среднеквадратического модуля G_d сложнее. Вначале он быстро возрастает, а затем снижается, поэтому кривая 3 становится выпуклой. Кривая 5 для тангенса фазы $tg\omega$ имеет форму в соответствии с определением (12).

Для состояний $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$ все характеристики вычислялись при смещениях от точных значений θ на одну десятую градуса. На рис. 3 кривые 1, 2, 4, 5 представляют характеристики с такими же множителями в зависимости от угла θ при $e_0 = 5\%$, а кривой 3 дан график для тангенса фазы $tg\omega$ с множителем 30.

Рис. 2. Зависимость характеристик Φ_m, G_m, Φ_d, G_d и $tg\omega$ (кривые 1-5) от деформации e_0 при $\theta = 30^\circ$

Рис. 3. Зависимость характеристик формоизменения Φ_m, G_m, Φ_d, G_d и $tg\omega$ (кривые 1-5) от угла θ при $e_0 = 5\%$

На рис. 4 кривые 1, 2 и 3 представляют модули G_i в зависимости от угла θ . Значения модуля G_1 в точке a и G_3 в точке b (рис. 4) методика определяет так же приближенно [11].

Рис. 4. Зависимость модулей G_i/μ от угла вида напряженного состояния θ

Чтобы убедиться, что характеристики формоизменения, отражают реальные свойства, на третьем этапе производится проверка. Она заключается в том, что произведение обобщенной податливости Φ_θ (11) на обобщенный модуль G_θ (16) равно единице. В ходе отработки методики выполнялась так же проверка по значениям коэффициентов $g_i = G_i/G_\theta = (c_j - c_\alpha)/(d_j - d_\alpha)$, которые определялись по первому равенству с помощью методики после вычисления характеристик G_i, G_θ и по второму равенству, как тригонометрические величины. На графиках рис. 5 а) и б) кривые по

обоим равенствам совпадают. При вычислениях по методике математические трудности можно избежать, если вычисления для состояний $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$ выполнять, как и ранее для характеристик формоизменения, при смещениях значений углов от точных значений на одну десятую градуса.

Вариации значений углов θ на 3~5 сотых градуса на положение кривых 1 рис. 5 а) и 3 рис. 5 б) практически не отражались. Коэффициент $g_1 = G_1/G_\theta$ на рис. 5 а) представлен кривыми при $\theta = \text{const}$ (угол θ изменяется с шагом в пять градусов). При $\theta = \pi/3$, коэффициент $g_1 = G_1/G_\theta = 1$, поскольку $G_1 = G_\theta$. Затем коэффициент g_1 монотонно повышается с уменьшением угла θ и при $\theta = 0$, когда для модуля G_1 имеет место неопределенность $G_1 = \tau_1/\gamma_1 = 0/0$.

Рис. 5. Зависимость коэффициентов g_1 и g_3 от деформации e_0 и угла θ : а) и б), соответственно. Кривая с номером 1 – растяжение, 2 – чистый сдвиг, а 3 – сжатие.

Физический смысл неопределенности объясняется тем, что диагональная площадка элемента тела, параллельная напряжению σ_1 , свободна от касательных напряжений и деформаций сдвига. На рис. 6 а) показаны кривые зависимости коэффициентов g_i от угла θ . Коэффициент g_1 при $\theta = 0$, то есть точном значении этого угла имеет неопределенность. Кривые представляются гладкими функциями при подходе к точкам a и b . Это говорит о наличии предельных значений для них по первому признаку Коши [15]. Значение коэффициента g_2 колеблется около единице в пределах 1%, что иллюстрируется на рис. 6 а), поэтому функция G_2 определяется при всех θ . Поведение коэффициента g_3 , аналогично

поведению коэффициента g_1 . Неопределенность для $G_3 = \tau_3/\gamma_3 = 0/0$ то же имеет место. При $\theta = 0$ коэффициент $g_3 = 1$, а с ростом угла θ уменьшается.

Модули сдвига G_1 и G_3 могут быть определены в этих точках по предельному значению коэффициентов. Для нахождения предельных значений коэффициентов $g_i = G_i/G_\theta$, ($i = 1, 3$) можно вначале определить числители, используя соотношение (16), которое для данных значений угла θ принимает вид $G_\theta = G_m \mp G_d/4$, и выражения для модулей G_i (15). После преобразований они принимают выражения: $G_1 = G_p + 3G_d/4$, $G_3 = G_c - 3G_d/4$, где G_p - обобщенный модуль при $\theta = 0$, а G_c при $\theta = \pi/3$, являющиеся знаменателями.

Это для коэффициентов дает неравенства $g_1 = G_1/G_p > 1$, $g_3 = G_3/G_c < 1$, которые не нарушаются, если принять $G_1 \leq G_c$, $G_3 \geq G_p$ и тем самым установить предельные выражения

$$g_1 \leq G_c/G_p = \Phi_p/\Phi_c = \chi > 1, \quad g_3 \geq G_p/G_c = \Phi_c/\Phi_p = 1/\chi. \quad (31)$$

Рис. 6. а) Зависимость коэффициентов g_1 , g_2 и g_3 от угла вида θ при деформации $e_0 = 5\%$. б) Связь коэффициентов g_1 при $\theta = 0$ и g_3 при $\theta = \pi/3$ с параметром $\chi = G_c/G_p$ от деформации e_0

Полученный результат согласуется с графиками рис. 4 и рис. 6 а), где значения этих модулей и коэффициентов g_1 и g_3 помечены точками a и b . Если левые части этих выражений рассчитать по методике, то результат будет соответствовать кривой 1 на рис. 5 а) и кривой 3 на рис. 5 б).

Кривая 1 перенесена на рис. 6 б) и обозначена символом g_1 (повернута по горизонтали на 180°). Кривая для коэффициента g_1 сравнивается с кривой для отношения секущих модулей или податливостей χ . Это отношение называется далее «текущей разномодульностью». Кривая 3 рис. 5 б) аналогично представлена кривой g_3 на рис. 6 б). Если допустить, что $g_1 \approx \chi$, то при $\theta = 0$ для искоемых модулей можно принять следующие значения: $G_1 \approx \chi G_p$, $G_2 = G_3 = G_p$.

Используя (31) и первые равенства соотношений (13) и (14), определяются приближенные значения для среднего и среднеквадратического модулей:

$$G_m \approx G_p(2 + \chi)/3, \quad G_d \approx 4G_p(1 - \chi)/3. \quad (32)$$

Подобные действия позволяют при $\theta = \pi/3$ определить $G_1 = G_2 = G_c$, $G_3 \approx G_c/\chi$. Тогда по (13) и (14) можно найти приближенные значения характеристик при обобщенном сжатии:

$$G_m \approx G_c(2\chi + 1)/3\chi, \quad G_d \approx 4G_c(\chi - 1)/3\chi. \quad (33)$$

Таким образом, соотношения (31), (32) и (33) дают возможность приближенного определения характеристик формоизменения по исходным данным для состояний $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$. С их помощью показана связь тензорной нелинейности с «текущей разномодульностью» χ и тем самым найдена связь модулей или податливостей в направлении главных касательных напряжений с модулями или податливостями, относящимся к базовым диаграммам $S_0 \sim e_0$.

В дополнение следует отметить, что коэффициенты g_i уточняют распределение деформаций сдвига «внутри» каждого напряженного состояния. Исследования этих коэффициентов имеет большое практическое значение, так как они показывают, что с возрастанием деформации e_0 ее распределение по направлениям главных касательных напряжений существенно отличается по сравнению деформациями тензорно – линейного подхода, поскольку из последнего следует, что $g_i = 1$ при любых значениях e_0 и θ .

Зависимость коэффициентов $g_m = g_i/3$ и $g_d = \{(8/9)(g_j - g_a)\}^{1/2}$ от аргументов e_0 и θ показана графиками на рис. 7 а) и б). Значения коэффициента g_m при чистом сдвиге (кривая 2 на рис. 7 а)), незначительно отличаются от единицы, что

позволяет по графикам оценить влияние тензорной нелинейности на результаты вычислений. С уменьшением угла θ поднимаются все кривые от 3 до 1, относящейся к растяжению. Их значения при этом соответственно изменяются с увеличением e_0 . На рис. 7 б) коэффициент $g_d = G_d/G_\theta$ представляется кривыми, заметно возрастающими с увеличением деформации e_0 , и тем самым показывает, что его значения зависят, прежде всего, от степени взаимного различия базовых диаграмм $S_0 \sim e_0$ (рис. 1).

Рис. 7. Зависимость коэффициентов g_m и g_d (а) и б), соответственно) от деформации e_0 и угла θ . Кривая 1 – растяжение, 2 – чистый сдвиг, а 3 – сжатие

Графики этого коэффициента дают общее представление о тензорной нелинейности материала, как с ростом деформации e_0 , так и угла θ . При деформации $e_0 > 2\%$ все коэффициенты, в том числе g_m и g_d имеют значения, которые нельзя считать малыми при любом напряженном состоянии. Эти коэффициенты необходимо учитывать при решении не только физических, но и технических задач.

Сложившееся представление о том, что тензорная нелинейность связана только с эффектами Рейнольдса и Ривлина, следует считать ошибочным. Графическая иллюстрация этих коэффициентов представляет интерес с теоретической точки зрения, поскольку они отражают поведение коэффициентов, входящих в материальные функции уравнений В. В. Новожилова (4). К этому необходимо отметить, что обобщенный модуль сдвига $G_\theta = S_0/3e_0$ не является постоянным числом или единой кривой, не зависимой от угла θ , и согласно его определению может быть найден при наличии диаграммы $S_0 \sim e_0$ непосредственно по результатам испытаний.

4 Вывод уравнений для описания эффекта дилатансии и сопоставление их с результатами испытаний

Для описания процесса деформирования при заданном напряженном состоянии в соответствии с уравнениями (22) помимо уравнений связи девиаторов требуются уравнения связи для шаровых частей тензоров напряжений и деформаций. Преобразования уравнений (2) приводит к уравнению связи между средним напряжением

$$\sigma_0 = F_0 + 2G_m \varepsilon_0 - 2G_d(1/2 - \varepsilon_0^2/e_0^2)e_0 \quad (34)$$

и инвариантами тензора деформации: ε_0 - средней деформации и e_0 - интенсивности деформации. Уравнение включает в себя характеристики формоизменения G_m и G_d (с переменным множителем), а так же F_0 - функцию инвариантов тензора деформации, конкретный вид которой устанавливается, исходя из необходимости отражения особенностей поведения рассматриваемых материалов.

Уравнение (34) приводится к линейной, принятой В. В. Новожиловым, $\sigma_0 = (3\Lambda_\varepsilon + 2G_m)\varepsilon_0 = 3K_\varepsilon\varepsilon_0$, если первое слагаемое принять в виде $F_0 = 3\Lambda_\varepsilon\varepsilon_0 + 2G_d(1/2 - \varepsilon_0^2/e_0^2)e_0$, где Λ_σ и K_ε - функции инвариантов тензора деформации. Первая, при условии линейной упругости равна λ - постоянной Ляме, а вторая K - модулю упругости при объемном сжатии. Если последнее выражение для функции F_0 сократить на одно слагаемое $2G_d(\varepsilon_0^2/e_0^2)e_0$, то из уравнения (34) следует нелинейные соотношения связи среднего напряжения с инвариантами тензора деформации, предлагается принять в двух вариантах

$$\sigma_0 = 3K_\varepsilon\varepsilon_0 - G_d e_0, \quad \sigma_0 = 3K_\varepsilon\varepsilon_0 - \kappa_\varepsilon G_d e_0. \quad (35)$$

При отработке математической модели второй вариант найден более удобным для согласования теории с опытными данными, где $\kappa_\varepsilon = \kappa = 0 \div 1$ - параметр отражающий эффект Ривлина (дилатансии).

В частном случае, когда $\Lambda_\sigma = \lambda$, материальные функции уравнений Рейнера принимают вид: $F_0 = 3\lambda\varepsilon_0 - 2G_d\varepsilon_0^2/e_0$, $F_1 = 2(G_m + G_d\varepsilon_0/e_0)$ и $F_2 = G_d/e_0$. Они могут быть графически представлены для состояний, при которых найдены характеристики формоизменения. Функция F_2 использовались М. Рейнером для описания

эффектов второго порядка, в том числе Рейнольдса и Ривлина [4]. В представленных уравнениях ее роль выполняет среднеквадратический модуль G_d .

Таким образом, материальные функции G_m и G_d , наделенные физическим смыслом, позволили сделать сравнение уравнений М. Рейнера (1) и (2) с уравнениями В.В. Новожилова (3) и (4). Исходные уравнения Рейнера приводятся к виду, в которых связь между девиаторами напряжений и деформаций совпадает с уравнениями В.В. Новожилова, а уравнение для шаровой части тензора напряжений представляется нелинейным соотношением, где тензорная нелинейность также заметно себя проявляет через материальную функцию G_d .

Из соотношений (35) следует, что формоизменение материалов может вызывать среднее напряжение σ_0 . Рассматриваемый материал склонен проявлять эффект, который исследовал Ривлин [4], то есть дилатансию (в обобщенном смысле). Аналогичный эксперимент, после изготовления оснастки, был проведен и автором данной работы [10]. Для изучения этого эффекта была создана установка. С ее помощью были проведены испытания цилиндра при стесненном кручении. Конструктивная схема такой установки приведена на рисунке 8 а) и б), которая включает в себя образец 1, представляющий собой полый цилиндр с внешним диаметром 90 мм, внутренним 20 мм и длиной 120 мм. Цилиндр жестко соединен с фланцами 5 и 6.

Рис. 8. Конструктивная схема приспособления: а) общий вид установки с элементами крепления; б) вид сверху с элементами нагружения цилиндра крутящим моментом

Рис. 9. Графики зависимости осевой силы P_z светлые точки и треугольники – опыт, сплошная линия – расчет и модуля G_d от e_0 ; среднего напряжения σ_0

При деформации кручения продольная деформация сохранялась нулевой, что обеспечивается сердечником 2 фланца 6, шарнирно связанного с силоизмерителем.

Основная деталь последнего выполнена в виде двухопорной балки 3 с тензодатчиками, которые регистрирует осевое усилие, вызванное кручением. К верхнему фланцу 5 закреплен диск 7, с помощью которого создается крутящий момент грузами 10 и тросами 8, перекинутыми через блоки 9. Значения усилия $P_z, \text{Н}$ по результатам испытаний показаны на рис. 9 и значения модуля G_d (МПа) в зависимости от интенсивности деформации e_0 ; значения среднего напряжения σ_0 (МПа) с множителем 20 по своду цилиндра. Из-за ползучести значение усилия возрастало. Однако все точки укладывались на одну кривую близкой к сплошной линии, соответствующей расчету, который основан на предположении о линейном изменении интенсивности деформации e_0 по своду цилиндра.

После определения среднеквадратического модуля G_d (пунктирная линия), найденного по описанной выше методике, проводился расчет среднего напряжения σ_0 по соотношению (35) при $\kappa = 0,5$ и напряжении σ_3 . По напряжению σ_3 вычислялось осевое усилие, соответствующее каждой ступени нагружения. Сравнение показывает качественное и количественное согласие расчета с результатами опыта. Проведенный эксперимент обнаружил эффект Ривлина, который подтвердил нашу гипотезу о том, что тензорная нелинейность ВНП проявляется даже при деформациях менее 10 %.

Преобразования, проведенные выше для определения среднего напряжения, выполнены и для уравнений (1), из которого вытекает связь объемной деформации с инвариантами напряженного состояния

$$\varepsilon_0 = \Phi_0 + \Phi_m \sigma_0 / 2 + \Phi_d (2S_0^2 / 9 - \sigma_0^2) / S_0. \quad (36)$$

Она приводится к линейной связи $\varepsilon_0 = \Phi_k \sigma_0 / 3$, и нелинейным, при использовании материальных функций Φ_m и Φ_d , подобных соотношениям (35)

$$\varepsilon_0 = \Phi_k \sigma_0 / 3 + 2\Phi_d S_0 / 9, \quad \varepsilon_0 = \Phi_k \sigma_0 / 3 + 2\kappa_\sigma \Phi_d S_0 / 9. \quad (37)$$

Для практического использования оказалось более удобным второе, где $\kappa_\sigma = \kappa = 0 \div 1$ - параметр разрыхления. Объемная деформация представлена в виде двух составляющих: $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^* + \varepsilon_g$. Первое, $\varepsilon_0^* = \Phi_k \sigma_0 / 3$ - представляет деформацию, зависящая от среднего напряжения, где $\Phi_k = 1/K$ - объемная податливость. Второе слагаемое в (37) отражает эффект разрыхления (дилатансии) [4, 10]. Для более точного

согласования результатов испытаний и расчетов необходимо, чтобы параметр, характеризующий склонность среды к разрыхлению, был величиной переменной

$$\alpha = \alpha_0(1 + \beta\xi), \quad (38)$$

где α_0, β константы, (для ВНП $\alpha_0 = 0,38$, $\beta = 0,46$), а $\xi = \sigma_0/S_0$ параметр, характеризующий вид простого нагружения.

На рис. 10 а) показаны пять графиков. Кривая 3 - представляет отношение деформации разрыхления к интенсивности деформации e_0 - интенсивность дилатансии $(e_g/e_0)_p$ при растяжении, кривая 2 - $(e_g/e_0)_\tau$ интенсивность дилатансии при сдвиге, кривая 4 - $(e_g/e_0)_c$ при сжатии, а кривая 1 - $(\varepsilon_0/e_0)_p$ иллюстрирует результаты опытов, полученных с помощью дилатометра, а именно интенсивности объемной деформации. Поскольку исходный коэффициент поперечной деформации близок к 0,5, поэтому интенсивность $(\varepsilon_0/e_0)_p$ можно сравнивать с интенсивностью дилатансии $(e_g/e_0)_p$. Кривая 5 иллюстрирует изменение параметра тензорной нелинейности g_d от деформации e_0 . Эти графики показывают, что интенсивность дилатансии качественно изменяется так же, как и параметр тензорной нелинейности.

Рис. 10. Зависимость интенсивности дилатансии e_g/e_0 и параметра g_d от деформации e_0 :

а) кривая 1- опыт, 2 - при сдвиге, 3 - при растяжении, 4 - при сжатии, кривая 5 - g_d (с множителем 0,2); б) кривая 1 - зависимость параметра g_d (с множителем 0,1) и кривая 2 - интенсивности дилатансии e_g/e_0 от угла θ

На рис. 10 б) показан график 2 для зависимости интенсивность дилатансии e_g/e_0 и кривая 1 для параметра $g_d/10$ от угла θ . Сходство кривых указывает на то, что одной из основных причин, вызывающих тензорную нелинейность, является разрыхление, а различие в поведении этих кривых объясняется различием их аналитических выражений, как функций от угла θ .

Наиболее ярко тензорная нелинейность проявляется при описании технических характеристик, рассчитываемых по соотношениям (23) и (24). При этом секущие модули упругости в направлении главных напряжений E_i приобретают разные значения при постоянной деформации e_0 , а число коэффициентов поперечных деформаций становится шесть, что отражено в работах [13, 14]. На рис. 11 а) показаны графики их зависимости от интенсивности деформации e_0 , а на рис. 11 б) от угла вида напряженного состояния θ .

Коэффициенты поперечных деформаций на рис. 11 а) относятся к углу $\theta = 30^\circ$. С ростом «текущей разномодульности» они изменяют свои значения, однако их сумма при деформации $e_0 = \text{const}$ стремится к значению $\sim \nu_{12}$. Коэффициенты поперечных деформаций на рисунке 11 б) относятся к постоянной деформации $e_0 = 5\%$.

Рис. 11. а) Зависимость коэффициентов поперечных деформаций ν_{ij} от интенсивности деформации e_0 ; б) зависимость ν_{ij} от угла θ

С практической точки зрения представляют интерес поведение модулей упругости и коэффициентов поперечных деформаций, которые определены в процессе испытаний, для сравнения их с результатами расчетов. На рис. 12 а) приведены графики для модулей упругости E_i/E от деформации e_0 при растяжении. Кривая 1 для E_1 при $\alpha \neq 0$ и кривая 2 для $(E_2 = E_3)$, а кривая 3 для $(E_2 = E_3)$ при $\alpha = 0$ представляют

теорию. С ростом значения параметра $\mathfrak{a}_p$ секущие модули в направлении, перпендикулярном свободным площадкам, возрастают. Кривая 4 для модуля E_1 представляет опытные данные.

На рис. 12 б) приведены графики для коэффициента поперечных деформаций ν_{12} . По результатам расчетов построены графики: кривая 1 при $\mathfrak{a}_p = 0,438$ и 2 при $\mathfrak{a} = 0$, которые представляют теорию. Сравнение кривых 1 и 2 показывает, что при отсутствии учета разрыхления по второму соотношению (37) приблизиться к описанию опытных значений коэффициента ν_{12} невозможно, если учитывается только нелинейность формоизменения. Кривая 3 - относится к результатам испытаний.

Рис. 12. Зависимость модулей E_i/E от деформации e_0 при растяжении:

- а) кривая 1 для E_1 , кривая 2 и кривая 3 - теория, а кривая 4 - опытные данные;
- б) зависимость ν_{12} от деформации e_0 при растяжении: кривая 1 и прямая 2 – результаты расчета, а кривая 3 - опытные данные

Для коэффициента ν_{12} при растяжении, принимая: $f = \Phi_d/3\Phi_m$, $\Phi_k = 1/K \approx 0$, соотношение (23) приводится к следующему выражению

$$\nu_{12}^p = [0,5 + (2 - \mathfrak{a})]f/[1 + 2(1 + \mathfrak{a})f]. \quad (39)$$

В этом выражении параметр $\mathfrak{a}$ резко снижает числитель, а еще в большей степени повышает знаменатель. Этим объясняется существенное изменение положение прямой линии 2 при $\mathfrak{a} = 0$ на рисунке 12 б) по сравнению с кривой 1 при $\mathfrak{a} \neq 0$ (сплошная линия) при учете деформации разрыхления, $\mathfrak{a}_p = 0,438$.

Подобное оценочное выражение можно получить и для коэффициента ν_{31} и объяснить изменение положения кривой 1 на рис. 13 б). Новое положение кривых приближается к реальному поведению ВНП при испытаниях, которое существенно зависит от значений коэффициентов α_0 и β . На рис. 13 а) приведены графики для модулей упругости E_i/E от деформации e_0 при сжатии. Кривые 1 для E_3 при $\alpha_c = 0,322$, кривая 2 для $(E_1 = E_2)$ при $\alpha_c = 0,322$, и кривая 3 для $(E_1 = E_2)$ при $\alpha = 0$ - представляют теорию, а кривая 4 для E_3 - опыт; б) зависимость коэффициента ν_{31} от e_0 при сжатии: кривая 1 при $\alpha_c = 0,322$, прямая 2 при $\alpha = 0$ представляют теорию, а кривая 3 - опыт.

Рис. 13. Зависимость модулей E_i/E от e_0 при сжатии: а) кривая 1 для E_3 при $\alpha_c = 0,322$, кривая 2 и кривая 3 представляют теорию, а кривая 4 для E_3 - опыт; б) зависимость коэффициента ν_{31} от e_0 при сжатии: кривая 1 и прямая 2 - теория, а кривая 3 - опыт

Влияние деформации разрыхления на технические характеристики показано путем сравнения с результатами испытаний с измерением поперечной деформации при растяжении и сжатии. Принятая связь объемной деформации с напряжениями в форме (37), вполне оправдана. Таким образом, тензорная нелинейность проявляется и на технических характеристиках, что расширяет возможности для последующих экспериментальных исследований деформационных свойств структурно - неоднородных материалов и других различных сред с зернистой структурой.

В заключение по данной публикации следует отметить, что все ее содержание было направлено на разработку математической модели, основанной на экспериментальных исследованиях автора высоконаполненного полимерного материала, как представителя структурно-неоднородных сред. Исследования проводились по программе, призванной показать проявления тензорной нелинейности при деформации материала,

сопровождающейся «текущей разномодульностью». Математическая модель структурно – неоднородных материалов объединена программой, с помощью которой отработаны все алгоритмы и проведены численные исследования.

За прошедший год автору была предоставлена возможность выступить с докладами по данной теме на кафедрах ведущих университетов. Вопросы и обсуждения позволили найти более точные выводы и определения, за что автор приносит благодарность руководителям кафедр и семинаров и всем слушателям.

Заключение

Основные результаты.

а) Дано определение тензорной нелинейности как эффекта, проявляющегося при деформации структурно-неоднородных сред, учет которого способствует установлению более точной связи девиаторных и шаровых частей тензоров напряжений и деформаций. Выполнено преобразование тензорно - нелинейных уравнений к виду, в котором материальным функциям придан физический смысл и возможность их определения по результатам испытаний.

б) Проведены экспериментальные исследования наполненных полимерных материалов с целью изучения особенностей их деформационных свойств, а так же испытания по исследованию связи среднего напряжения и объемной деформации при формоизменении (дилатансии в обобщенном смысле, то есть разрыхления или изменения среднего напряжения при деформациях формоизменения).

в) Проведена обработка результатов испытаний и подготовка исходных данных для расчетных работ, разработана методика восстановления материальных функций по результатам испытаний, располагая базовыми диаграммами $S_0 \sim e_0$. Показано, что для состояний $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$ характеристики формоизменения определяются по исходным данным, но приближенно.

г) Дано преобразование тензорно-нелинейных уравнений к виду, характерному для описания анизотропных материалов, получены алгоритмы для расчета технических характеристик, разработаны расчетные формулы, связывающие характеристики упругости в направлении главных напряжений, разработаны расчетные формулы, связывающие характеристики упругости, при наличии начальной разномодульности.

д) Проведен вывод уравнений связи среднего напряжения с инвариантами тензора деформаций и средней деформации с инвариантами тензора напряжений. Показано влияние деформации разрыхления на деформационные характеристики материала и возможность ее учета при их описании, а так же установлена связь разрыхления с тензорной нелинейностью. Представлена возможность учета эффектов Рейнольдса и Ривлина.

Список литературы

1. Reiner M. A mathematical theory of dilatancy // Am. J. Math. 1945. Vol. 67, no. 3. P. 350-362.
2. Новожилов В.В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // Прикладная математика и механика. 1951. Т.15, вып. 2. С. 183-194.
3. Георгиевский Д.В. Тензорно нелинейные сдвиговые течения: материальные функции и диффузионно-вихревые решения // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 3. С. 451-463.
4. Рейнер М. Реология: пер. с англ. / под ред. Э.И. Григолюка. М.: Наука, 1965. 223 с.
5. Комков К.Ф. Об уравнениях связи деформаций с напряжениями для материалов, оказывающих различное сопротивление растяжению и сжатию // Изв. ВУЗов. Машиностроение. 1989. № 7. С. 3-6.
6. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 6. С. 29-34.
7. Комков К.Ф. К определению параметров Лоде при обработке результатов испытаний // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 2. С. 126-135.
8. Дэвис Е. Рост напряжений с изменением деформаций и зависимость "напряжения - деформации" в пластической области для меди при сложном напряженном состоянии // Теория пластичности : сб. статей : пер. с англ., франц., нем. / под ред. Ю.И. Работнова. М.: Издательство иностранной литературы, 1948. С. 336-374.
9. Комков К.Ф. О физическом смысле фазы подобия девиаторов и возможности ее определения по результатам испытаний при простых напряженных состояниях // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. №3 (30). С. 75-83.
10. Комков К.Ф. Особенности упругих свойств высоконаполненных полимерных материалов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2008. №3 (72). С. 3-13.
11. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
12. Комков К.Ф. Восстановление закономерности изменения вида деформируемого состояния и сдвиговых характеристик пластических материалов // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. №2 (33). С. 81-91.
13. Комков К.Ф. Описание анизотропии изотропных материалов, вызванной пластической деформацией // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 147-153.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 831 с.

Tensor nonlinear structurally heterogeneous materials

08, August 2012

DOI: 10.7463/0812.0466666

Komkov K.F.

Russia, Balashikha, the Military Technical University
06kfk38@mail.ru

Analyses of Novozhilov equations show that existence of tensor nonlinearity is due to the difference of values of the shear moduli in the direction of the principal shear stresses. It is shown that materials which have different degrees of non-linear charts at simple stress state develop tensor nonlinearity where, with increasing stress state, the deformed state is significantly different from the decisions made by models which do not take into account this effect.

Publications with keywords: [methods](#), [chart](#), [anisotropy](#), [tensor non-linearity](#), [material function](#)
Publications with words: [methods](#), [chart](#), [anisotropy](#), [tensor non-linearity](#), [material function](#)

References

1. Reiner M. A mathematical theory of dilatancy. *Am. J. Math.*, 1945, vol. 67, no. 3, pp. 350-362.
2. Novozhilov V.V. O sviazi mezhdru napriazheniiami i deformatsiiami v nelineino-uprugoi srede [The connection between stresses and deformations in nonlinear elastic medium]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1951, vol. 15, no. 2, pp. 183-194.
3. Georgievskii D.V. Tenzorno nelineinye sdvigovye techeniia: material'nye funktsii i diffuzionno-vikhrevye resheniia [Tensor-nonlinear shear flows: Material functions and the diffusion-vortex solutions]. *Nelineinaia dinamika* [Non-linear dynamics], 2011, vol. 7, no. 3, pp. 451-463.
4. Reiner M. *Rheology*. Berlin, Springer, 1958. (Russ. ed.: Reiner M. *Reologiya*. Moscow, Nauka, 1965. 223 p.).
5. Komkov K.F. Ob uravneniiakh sviazi deformatsii s napriazheniiami dlia materialov, okazyvaiushchikh razlichnoe soprotivlenie rastiazheniiu i szhatiiu [About the equations of connection of deformations with tensions for materials, that have a different resistance to tension and compression]. *Izv. VUZov. Mashinostroenie* [Bulletin of the Universities. Mechanical Engineering], 1989, no. 7, pp. 3-6.

6. Lomakin E.V., Rabotnov Iu.N. Sootnosheniia teorii uprugosti dlia izotropnogo raznomodul'nogo tela [Relations of the theory of elasticity for an isotropic multimodulus body]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [A Journal of USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 1978, no. 6, pp. 29-34.

7. Komkov K.F. K opredeleniiu parametrov Lode pri obrabotke rezul'tatov ispytanii [Determination of Lode parameters in processing the results of tests]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela* [A Journal of Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 2005, no. 2, pp. 126-135.

8. Davis E.A. Increase of stress with permanent strain and stress-strain relations in the plastic state for copper under combined stresses. *J. Appl. Mech., Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.*, Dec. 1943, vol. 10, no. 4, pp. A-187 - A-196. (Russ ed.: Devis E. Rost napriazhenii s izmeneniem deformatsii i zavisimost' "napriazheniia - deformatsii" v plasticheskoi oblasti dlia medi pri slozhnom napriazhennom sostoianii. In book: *Teoriia plastichnosti : sb. statei* [Theory of plasticity : collection of articles (Translated from English, French, German)]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1948, pp. 336-374.).

9. Komkov K.F. O fizicheskom smysle fazy podobii deviatorov i vozmozhnosti ee opredeleniia po rezul'tatam ispytanii pri prostykh napriazhennykh sostoianiiakh [On physical meaning of similarity phase of deviators and possibility of its determination by results of testing at simple stress states]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2008, no. 3 (30), pp. 75-83.

10. Komkov K.F. Osobennosti uprugikh svoistv vysokonapolnennykh polimernykh materialov [Peculiarities of elastic properties of highly filled polymer materials]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Mechanical Engineering], 2008, no. 3 (72), pp. 3-13.

11. Lekhnitskii S.G. *Teoriia uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow, Nauka, 1977. 415 p.

12. Komkov K.F. Vosstanovlenie zakonomernosti izmeneniia vida deformiruемого sostoianiia i sdvigovykh kharakteristik plasticheskikh materialov [Recovery of law of variations of deformation state form and shift characteristics of plastic materials]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2009, no. 2 (33), pp. 81-91.

13. Komkov K.F. Opisanie anizotropii izotropnykh materialov, vyzvannoi plasticheskoi deformatsiei [Description of the anisotropy of the isotropic materials, caused by plastic deformation]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela* [A Journal of Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 2008, no. 1, pp. 147-153.

14. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook on mathematics for scientists and engineers]. Moscow, Nauka, 1977. 831 p.