

## Особенности перехода к путевым координатам в задаче путевой стабилизации

# 07, июль 2012

DOI: 10.7463/0712.0445496

Канатников А. Н., Касаткина Т. С.

УДК 517.977

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана  
[skipper@bmstu.ru](mailto:skipper@bmstu.ru)

### Введение

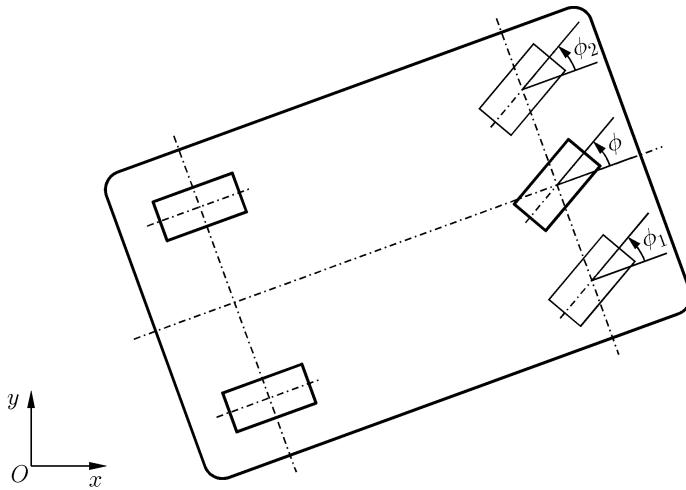
Задача следования колесного робота вдоль заданного криволинейного пути в литературе активно обсуждается, что отражает ее актуальность [1]. Эта задача возникает, например, в сельском хозяйстве при планировании пути трактора, убирающего урожай. Публикации, посвященные этой проблеме, различаются по используемой модели, в которых могут учитываться модели проскальзывания колес, наличие привода передних колес и т.п., по виду предписанной траектории [2, 3, 4]. В [4, 5] управление строится для системы, представленной в цепной форме. В [2, 6] предложены замены переменных состояния, позволяющие выполнить линеаризацию системы обратной связью. В [6] также предлагается закон управления, учитывающий ограниченный ресурс входного сигнала.

Один из подходов к решению задачи следования по заданному пути состоит в переходе в рамках кинематической модели от неподвижной декартовой системы координат к путевым координатам [2, 6, 7]. В данной работе анализируются условия, при которых такой переход является корректным.

В разд. 1 описывается кинематическая модель колесного робота в декартовых координатах. В разд. 2 приведен вывод кинематических уравнений в путевых координатах, позволяющий построить отображение, описывающее такой переход. В разд. 3 выявляются условия диффеоморфности отображения перехода, это отображение анализируется в частных случаях, когда предписанная траектория является прямой или окружностью.

### 1. Кинематическая модель колесного робота в декартовых координатах

Мобильный робот с автомобильной компоновкой колес представляет собой транспортное средство, движущееся без проскальзывания колес (рис. 1). При этом задние колеса робота являются ведущими, а передние обеспечивают поворот его платформы.



**Рис. 1.** Колесный робот

Вместо четырехколесной модели робота будем рассматривать более простую трехколесную, заменив два передних колеса одним, расположенным между ними. Угол  $\phi$  поворота переднего колеса трехколесного робота соответствует полусумме углов  $\phi_1$  и  $\phi_2$  поворота передних колес четырехколесного робота:

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}.$$

В качестве переменных состояния колесного робота рассмотрим следующие величины:

- 1)  $x_C, y_C$  — координаты базовой точки робота (середина задней оси);
- 2)  $\phi$  — угол поворота переднего колеса;
- 3)  $\vartheta$  — угол наклона центральной линии платформы (эта линия указывает направление вектора скорости робота);
- 4)  $v$  — модуль вектора скорости робота.

Тогда кинематические уравнения движения робота будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_C = v \cos \vartheta, \\ \dot{y}_C = v \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = \frac{v}{l} \operatorname{tg} \phi, \\ \dot{\phi} = \omega, \end{cases} \quad (1)$$

где  $l$  — расстояние от базовой точки до центра переднего колеса;  $\omega$  — угловая скорость переднего колеса;  $v$  — модуль вектора скорости робота. Параметры  $v$  и  $\omega$  рассматриваются как управлении. Эти параметры определяются динамическими характеристиками соответствующих приводов.

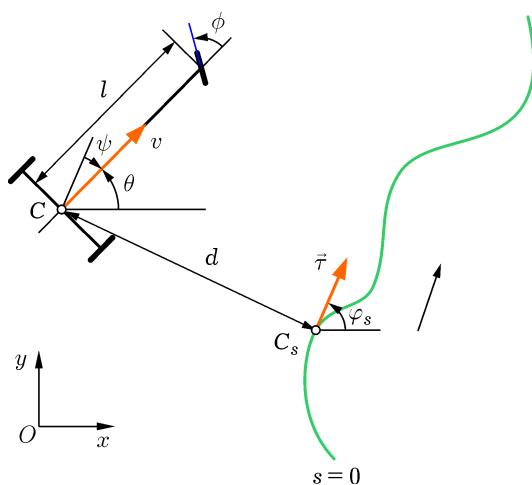
## 2. Кинематическая модель колесного робота в путевых координатах

Для обеспечения движения робота по заданной (предписанной) траектории необходимо предложить алгоритм управления, позволяющий возвращать робот на предписанную тра-

екторио в случае его отклонения, т.е. алгоритм стабилизирующего управления в форме обратной связи. Один из подходов к решению этой задачи состоит в преобразовании математической модели путем перехода к новым переменным, называемым путевыми координатами. Эти координаты напрямую связаны с предписанной траекторией движения и хорошо фиксируют возможные отклонения.

Путевыми координатами называют [7]:

- 1)  $s$  — натуральный параметр кривой, задающей предписанную траекторию движения;
- 2)  $d$  — расстояние от базовой точки  $C$  робота до предписанной траектории движения;
- 3)  $\psi$  — угол между центральной линией платформы и касательным вектором к предписанной траектории в точке  $C_s$ , ближайшей к базовой точке робота;
- 4)  $\phi$  — угол поворота переднего колеса (рис. 2).



**Рис. 2.** Положение колесного робота относительно предписанной траектории

Для представления кинематики робота в путевых координатах предположим, что предписанная траектория задана уравнениями  $x_s = x_s(s)$ ,  $y_s = y_s(s)$ . Тогда единичный касательный вектор  $\vec{\tau}$  в точке этой кривой, соответствующей значению  $s$  натурального параметра, имеет координаты

$$\vec{\tau} = (x'_s(s), y'_s(s)).$$

Отметим, что, поскольку  $\vec{\tau}$  — единичный вектор, то

$$(x'_s)^2 + (y'_s)^2 = 1.$$

Отсюда вытекают соотношения [8]

$$x''_{ss} = -ky'_s, \quad y''_{ss} = kx'_s, \quad (2)$$

где  $k = k(s)$  — кривизна кривой в текущей точке.

Из геометрических соображений заключаем, что декартовы координаты базовой точки робота задаются соотношениями

$$x_C = x_s - y'_s d, \quad y_C = y_s + x'_s d. \quad (3)$$

В этих соотношениях учтено, что, во-первых, движению по траектории соответствует увеличение натурального параметра, а во-вторых, расположению робота левее предписанной траектории соответствует положительное значение параметра  $d$ . Значение  $d = 0$  указывает на то, что робот находится на заданной кривой.

Дифференцируя соотношения (3) по параметру  $s$ , с учетом (2) получаем

$$\begin{cases} \dot{x}_C = x'_s \dot{s} - y''_{ss} \dot{s}d - y'_s \dot{d} = x'_s(1 - kd)\dot{s} - y'_s \dot{d}, \\ \dot{y}_C = y'_s \dot{s} + x''_{ss} \dot{s}d + x'_s \dot{d} = y'_s(1 - kd)\dot{s} + x'_s \dot{d}. \end{cases} \quad (4)$$

Координаты  $x'_s, y'_s$  вектора  $\tau$  можно выразить через угол  $\varphi_s$  наклона этого вектора:

$$x'_s = \cos \varphi_s, \quad y'_s = \sin \varphi_s. \quad (5)$$

Подставляя (5) в соотношения (4), находим

$$\dot{x}_C = (1 - kd)\dot{s} \cos \varphi_s - \dot{d} \sin \varphi_s, \quad \dot{y}_C = (1 - kd)\dot{s} \sin \varphi_s + \dot{d} \cos \varphi_s. \quad (6)$$

Рассматривая уравнения (6) как уравнения относительно  $\dot{s}$  и  $\dot{d}$ , получаем

$$(1 - kd)\dot{s} = \dot{x}_C \cos \varphi_s + \dot{y}_C \sin \varphi_s, \quad \dot{d} = -\dot{x}_C \sin \varphi_s + \dot{y}_C \cos \varphi_s,$$

откуда, заменив  $\dot{x}_C$  и  $\dot{y}_C$  через модуль вектора скорости  $v$ , приходим к соотношениям

$$\dot{s}(1 - kd) = v \cos(\vartheta - \varphi_s) = v \cos \psi, \quad \dot{d} = v \sin(\vartheta - \varphi_s) = v \sin \psi. \quad (7)$$

Чтобы найти  $\dot{\psi}$ , отметим, что  $\varphi'_s$  — это скорость вращения единичного вектора  $\vec{\tau}$ , т.е. кривизна  $k = k(s)$  кривой в текущей точке. Учитывая это, находим

$$\dot{\psi} = \dot{\vartheta} - \dot{\varphi}_s = \dot{\vartheta} - \varphi'_s \dot{s} = \frac{v}{l} \operatorname{tg} \phi - k \dot{s} = \frac{v}{l} \operatorname{tg} \phi - \frac{kv \cos \psi}{1 - kd}. \quad (8)$$

Объединяя уравнения (7), (8) и последнее уравнение системы (1), получаем кинематические уравнения робота в путевых координатах (см. также [5]):

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{kv \cos \psi}{1 - kd}, \\ \dot{d} = v \sin \psi, \\ \dot{\psi} = \frac{v}{l} \operatorname{tg} \phi - \frac{kv \cos \psi}{1 - kd}, \\ \dot{\phi} = \omega. \end{cases} \quad (9)$$

### 3. Анализ перехода от декартовых координат к путевым

Приведенный вывод кинематических уравнений в путевых координатах представляет интерес тем, что построен на связи двух систем координат. Действительно, если записано отображение, то далее правые части системы дифференциальных уравнений изменяются как координаты векторного поля, а запись кинематических уравнений в новых, путевых координатах есть не что иное как преобразование векторного поля при переходе в другую систему координат.

Анализируя вывод кинематических уравнений можем записать отображение  $\Phi$ , связывающее путевые координаты с декартовыми:

$$\begin{cases} x_C = x_s - y'_s d, \\ y_C = y_s + x'_s d, \\ \vartheta = \psi + \varphi_s, \\ \phi = \phi. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь величина  $\varphi_s$ , напомним, есть угол наклона касательного вектора  $\vec{\tau}$  к опорной кривой и, следовательно, есть функция от координат  $x'_s$  и  $y'_s$  этого вектора. В свою очередь, величины  $x_s$ ,  $y_s$ ,  $x'_s$ ,  $y'_s$  есть известные функции переменного  $s$  — натурального параметра опорной кривой. Таким образом, в записанных уравнениях правые части содержат четыре переменные:  $s$ ,  $d$ ,  $\psi$  и  $\phi$ .

Анализ замены переменных позволяет обосновать корректность перехода в рассматриваемой задаче к путевым координатам. Под корректностью перехода от одних координат к другим понимается условие, что соответствующее отображение является диффеоморфизмом. Условие диффеоморфности, в частности, позволяет делать заключения об асимптотической устойчивости в одних координатах, если это имеет место в других. Возможны два варианта проверки свойства диффеоморфности отображения: локальный и глобальный (т.е. в заданной области).

**Локальные свойства замены переменных.** Отображение  $\Phi$ , задающее переход от путевых координат к декартовым, имеет вид (10). Для того чтобы это отображение было локально диффеоморфным, необходимо и достаточно, чтобы оно было гладким и его якобиан был отличен от нуля. Тогда по теореме об обратной функции для любой точки можно выбрать ее окрестность, в которой отображение задает диффеоморфизм.

Непосредственно из выражений (10) вытекает, что если опорная кривая, параметризованная натуральным параметром, является, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемой, то отображение  $\varphi$  является непрерывно дифференцируемым. Следует отметить величину  $\varphi_s$ , которую следует понимать как функцию натурального параметра  $s$ . Вообще говоря, угол наклона касательного вектора  $\vec{\tau}$  определен неоднозначно (с точностью до  $2\pi$ ). Однако если ограничиться односвязной областью изменения этого вектора, то функцию  $\varphi_s$

можно однозначно описать функцией

$$\text{atan2}(x, y) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0; \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \end{cases} \quad (11)$$

которая входит в библиотеки многих языков программирования. При  $x = y = 0$  эта функция не определена. Функция  $\text{atan2}(x, y)$  является гладкой в любой области на плоскости, не содержащей точки отрицательной части оси  $Ox$ . С помощью этой функции мы можем записать

$$\varphi_s = \text{atan2}(x'_s, y'_s).$$

Матрица Якоби отображения  $\Phi$  (10) имеет вид

$$M_\Phi = \begin{pmatrix} x'_s - y''_{ss}d & -y'_s & 0 & 0 \\ y'_s + x''_{ss}d & x'_s & 0 & 0 \\ \varphi'_s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\varphi'_s = y''_{ss}x'_s - x''_{ss}y'_s$  — производная функции  $\varphi_s$  по переменному  $s$ . Отсюда находим якобиан отображения  $\Phi$ :

$$J_\Phi = \det M J_\Phi = x'_s(x'_s - y''_{ss}d) + y'_s(y'_s + x''_{ss}d) = (x'_s)^2 + (y'_s)^2 - (x'_s y''_{ss} - y'_s x''_{ss})d = 1 - kd.$$

Таким образом, отображение (10) задает локальную замену переменных в тех точках, в которых выполнено условие

$$1 - kd \neq 0. \quad (12)$$

Проанализируем, что будет означать условие (12) в частных случаях, когда предписанная траектория представляет собой прямую или окружность.

Зададим прямую параметрическими уравнениями

$$x = a_1t + a_2, \quad y = b_1t + b_2, \quad (13)$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  — известные постоянные, причем

$$a_1 \neq 0, \quad b_1 \neq 0. \quad (14)$$

Полагаем, что движение робота по этой прямой означает возрастание параметра  $t$ . Тогда естественный параметр  $s$  вводится следующим образом:

$$s = t \sqrt{a_1^2 + b_1^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} s + a_2, & x'_s &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \\ y_s &= \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} s + b_2, & y'_s &= \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}. \end{aligned}$$

Отображение  $\Phi$  (10) в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} x_C = \frac{a_1 s - b_1 d}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} + a_2, \\ y_C = \frac{b_1 s + a_1 d}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} + b_2, \\ \vartheta = \psi + \text{atan}2(a_1, b_1), \\ \phi = \phi. \end{cases} \quad (15)$$

Нетрудно увидеть, что отображение (15) гладкое. Кроме того, поскольку для прямой  $k = \infty$ , то условие (12) выполнено. Таким образом, в случае, когда предписанная траектория есть прямая, отображение  $\Phi$  (10) задает локальную замену переменных в любой точке фазового пространства системы.

Остановимся на случае, когда предписанная траектория есть окружность. Зададим окружность параметрически:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad (16)$$

где  $a \neq 0$  — радиус окружности. Если робот движется по окружности против часовой стрелки, т.е. параметр  $t$  возрастает, то натуральный параметр на окружности вводится следующим образом:

$$s = at.$$

Поэтому в данном случае

$$\begin{aligned} x_s &= a \cos \frac{s}{a}, & x'_s &= -\sin \frac{s}{a}, \\ y_s &= a \sin \frac{s}{a}, & y'_s &= \cos \frac{s}{a}, \end{aligned}$$

а отображение  $\Phi$  (10) имеет вид

$$\begin{cases} x_C = (a - d) \cos \frac{s}{a}, \\ y_C = (a - d) \sin \frac{s}{a}, \\ \vartheta = \psi + \frac{s}{a} + \frac{\pi}{2}, \\ \phi = \phi. \end{cases} \quad (17)$$

Ясно, что это отображение гладкое. При этом условие (12) в данном случае сводится к неравенству  $d \neq a$ . То, что равенство  $d = a$  приводит к локальной необратимости отображения  $\Phi$ ,

вытекает из геометрических соображений: в этом случае величины  $x_C$  и  $y_C$  имеют одно и то же значение при любых  $s$  (это будут координаты центра окружности).

**Замена переменных в области.** Локальная диффеоморфность отображения — необходимое условие диффеоморфности в заданной области, но оно не является достаточным. Уже пример окружности показывает, что отображение  $\Phi$  может оказаться неинъективным и в этом случае не будет диффеоморфизмом в данной области. Однако, если отображение  $\Phi$  инъективно, то оно имеет обратное отображение, которое по теореме об обратной функции является гладким (при условии, что опорная кривая достаточно гладкая). Обратимость же отображения  $\Phi$  связана с возможностью по декартовым координатам базовой точки  $C$  определить однозначно ближайшую точку на опорной кривой. Несложно привести пример, когда это невозможно (например, для точек оси симметрии параболы).

С алгебраической точки зрения эта ситуация выглядит следующим образом. Исключив из первых двух уравнений (10) переменное  $d$ , получим уравнение

$$x_C x'_s + y_C y'_s = x_s x'_s + y_s y'_s, \quad (18)$$

которое следует рассматривать как уравнение от переменных  $x_C, y_C$  и  $s$ . Если оно разрешимо относительно  $s$  хотя бы в геометрическом смысле, т.е. для каждой пары  $x_C, y_C$  уравнение имеет единственное решение относительно  $s$ , то определена некоторая функция

$$s = \tilde{f}(x_C, y_C).$$

С помощью этой функции можно определить величину  $\varphi_s$ , а с ней и переменную  $\psi$ . Величина  $d$  при известном  $s$  находится, например, из первого уравнения (10). В результате заданные значения  $x_C, y_C, \vartheta, \phi$  будут однозначно определять значения  $s, d, \psi, \phi$ , т.е. отображение  $\Phi$  будет обратимым.

Таким образом, для выделения области, в которой отображение  $\Phi$  есть диффеоморфизм, надо найти множество  $U$  точек на плоскости, для которых ближайшая точка опорной кривой определяется однозначно, т.е. уравнение (18) относительно  $s$  имеет неединственное решение. Затем в пространстве переменных  $(s, d, \psi, \omega)$  выбросить все точки, которые отображение переводят в точки со значением пары  $(x_C, y_C)$  из множества  $U$ . Получим множество  $K$ . В любой области, целиком содержащейся в  $K$ , отображение  $\Phi$  является диффеоморфизмом.

Возвращаясь к прямой и окружности как опорной кривой, можем сделать следующий вывод. Если опорная кривая представляет собой прямую, то отображение  $\Phi$  диффеоморфно в  $\mathbb{R}^4$ , поскольку на плоскости любая точка имеет единственную ближайшую точку на прямой — основание перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Если опорная кривая представляет собой окружность радиуса  $a$  или ее дугу, то отображение  $\Phi$  диффеоморфно в области в  $\mathbb{R}^4$ , описываемой неравенством  $d \neq a$ , так как на плоскости единственная точка,

для которой ближайшая точка окружности определяется неоднозначно — это центр окружности. В пространстве переменных  $(s, d, \psi, \omega)$  центру окружности соответствуют точки гиперплоскости  $d = a$ .

В общем случае верно следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть опорная кривая задана параметрически в виде  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ , где  $s$  — натуральный параметр и функции  $x(s)$  и  $y(s)$  дважды непрерывно дифференцируемы. Тогда существует такая окрестность  $G$  опорной кривой, что любая точка  $P \in G$  имеет единственную ближайшую точку на опорной кривой, т.е. отображение  $\Phi$  диффеоморфно в области  $d < d_0$  при достаточно малом значении  $d_0$ .

◀ Выберем произвольное значение  $s_0$  параметра  $s$ . В точке  $s = s_0$ ,  $d = 0$ ,  $\psi = \psi_0$ ,  $\phi = \phi_0$  условие (12) выполнено. Значит, существует окрестность  $V \subset \mathbb{R}^4$ , в которой отображение  $\Phi$  диффеоморфно. Рассмотрим проекцию  $V_2$  области  $\Phi(V) \in \mathbb{R}^4$  на плоскость переменных  $x_C, y_C$ . В  $V_2$  любая точка имеет единственную ближайшую точку на опорной кривой среди тех, которые находятся в  $V_2$ . Выбирая в  $V_2$  некоторую окрестность  $O(x_0, y_0)$ , где  $x_0 = x(s_0)$ ,  $y_0 = y(s_0)$ , и уменьшая ее радиус вдвое, получим окрестность  $O'(x_0, y_0)$  с некоторым радиусом  $\rho_0$ . Любая точка этой окрестности на опорной кривой имеет единственную ближайшую точку, поскольку расстояние до любой точки опорной кривой вне окрестности  $O(x_0, y_0)$  превышает расстояние до точки  $(x_0, y_0)$ . Окрестности  $O'(x_0, y_0)$  в пространстве переменных  $(s, d, \psi, \phi)$  соответствует некоторая область  $G(s_0)$ , которая содержит все точки, удовлетворяющие условиям  $s = s_0$ ,  $d < \rho_0$ . Объединяя все области  $G(s_0)$  по всем значениям натурального параметра, получим область в  $\mathbb{R}^4$ , в которой отображение  $\Phi$  инъективно, а значит, диффеоморфно. Эта область, в частности, содержит область  $d < \rho_0$ . ►

## Заключение

В задаче следования робота по заданной траектории рассмотрен процесс перехода от декартовых координат к путевым. Проанализированы условия, при которых такой переход является корректным, т.е. переход от одних переменных к другим определяется диффеоморфизмом.

Полученные условия корректности перехода проанализированы в частных случаях вида предписанной траектории: прямой и окружности.

Доказано, что переход к путевым координатам является корректным в достаточно малой окрестности предписанной траектории.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 12-07-00267 и 12-07-00329) и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-3659.2012.1).

## **Список литературы**

1. Бурдаков С.Ф., Мирошник И.В., Стельмаков Р.Э. Системы управления движением колесных роботов. СПб.: Наука, 2001. 227 с.
2. Гилимьянов Р.Ф., Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б. Управление движением колесного робота в задаче следования вдоль криволинейного пути // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. Т. 47, № 6. С. 158–165.
3. Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б. Стабилизация движения колесного робота вдоль криволинейной траектории, проложенной по неровной поверхности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 4. С. 167–176.
4. Андрианова О.Г. Моделирование движения колесного робота по заданному пути // Наука и образование: электронное научное издание. 2011. №10 [Электронный ресурс]. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/239840.html> (дата обращения: 02.04.2012).
5. Thuilot B., Cariou C., Martinet P., Berducat M. Automatic Guidance of a Farm Tractor Relying on a Single CP-DGPS // Autonomous Robots. 2002. V. 13. P. 53–71.
6. Пестерев А.В. Синтез стабилизирующего управления в задаче следования колесного робота вдоль заданной кривой // Автоматика и телемеханика. 2012. № 7. С. 25–39.
7. Robot Motion Planning and Control / Ed. J.-P. Laumond. Ser. Lectures Notes in Control and Information Sciences. V. 229. Springer, 1998. 343 p.
8. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. М.: УРСС, 2003. 404 с.

## Features of transition to path coordinates in a problem of path stabilisation

# 07, July 2012

DOI: [10.7463/0712.0445496](https://doi.org/10.7463/0712.0445496)

Kanatnikov A. N., Kasatkina T. S.

Russia, Bauman Moscow State Technical University  
[skipper@bmstu.ru](mailto:skipper@bmstu.ru)

The model of the wheeled robot with automobile configuration of wheels in a problem of path stabilisation is considered. Conditions at which transition from the Cartesian coordinates to the trajectory coordinates at the path stabilization problem is correct are investigated. Performance of these conditions for the elementary types of a trajectory of the robot is analyzed.

### References

1. Burdakov S.F., Miroshnik I.V., Stel'makov R.E. Sistemy upravleniya dvizheniem kolesnykh robotov [Motion control systems of wheeled robots]. St. Petersburg, Nauka Publ., 2001. 227 p.
2. Gilim'ianov R.F., Pesterev A.V., Rapoport L.B. Upravlenie dvizheniem kolesnogo robota v zadache sledovaniia vdol' krivolineinogo puti [Motion control of a wheeled robot in the task of following along a curved path]. Izvestiia RAN. Ser. Teoriia i sistemy upravlenii [Journal of Russian Academy of Sciences. Ser. Control Systems and Theory], 2008, vol. 47, no. 6, pp. 158-165.
3. Pesterev A.V., Rapoport L.B. Stabilizatsiia dvizheniiia kolesnogo robota vdol' krivolineinoi traektorii, prolozhennoi po nerovnoi poverkhnosti [Stabilization of a wheeled robot motion along a curved path, laid on a rough surface]. Izvestiia RAN. Ser. Teoriia i sistemy upravlenii [Journal of Russian Academy of Sciences. Ser. Control Systems and Theory], 2010, no. 4, pp. 167-176.
4. Andrianova O.G. Modelirovanie dvizheniiia kolesnogo robota po zadannomu puti [Path following simulation of wheeled vehicle]. Nauka i obrazovanie, 2011, no. 10. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/239840.html>. Accessed April 02, 2012.
5. Thuilot B., Cariou C., Martinet P., Berducat M. Automatic guidance of a farm tractor relying on a single CP-DGPS. Autonomous Robots, 2002, vol. 13, no. 1, pp. 53-71. DOI: 10.1023/A:1015678121948.

6. Pesterev A.V. Sintez stabiliziruiushchego upravleniia v zadache sledovaniia kolesnogo robota vdol' zadannoi krivoi [Synthesis of a stabilizing control for the problem of following a wheeled robot along a given curve]. Avtomatika i telemekhanika, 2012, no. 7, pp. 25-39.
7. Laumond J.-P., ed. Robot motion planning and control. Berlin, Springer, 1998. 343 p. (Lectures Notes in Control and Information Sciences, vol. 229).
8. Pozniak E.G., Shikin E.V. Differentsial'naia geometriia [Differential geometry]. Moscow, URSS Publ., 2003. 404 p.