Синтез управления в стохастических системах методом обобщенного полиномиального хаоса

05, май 2012

DOI: 10.7463/0512.0410536

Пупков К. А., Фам С. Ф.

УДК 681.06

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

pupkov@iu1.bmstu.ru

phangvn@mail.ru

Введение

Метод на основе обобщенного полиномиального хаоса (ОПХ) [1-3], обеспечивает анализ и синтез динамической системы при наличии неопределенности (начальные условия, параметры, структура и воздействия окружающей среды). Полученное решение использует средние значения параметров системы с вероятностной неопределенностью. Предполагается, что функция плотности вероятности значений этих параметров известна.

При решении задачи синтеза и анализа стохастических динамических систем на основе ОПХ скорость сходимости и точность решения зависят от числа членов разложения. Метод ОПХ имеет преимущество перед классическими методами (метод Монте-Карло, H^∞ и другие).

1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления в стохастических линейных системах [3-5]. Модель системы имеет вид

$$\dot{x}(\xi, t) = A(\xi)x(\xi, t) + B(\xi)u(\xi, t), \quad (1)$$

где $x(\xi, t) \in R^n$, $u(\xi, t) \in R^m$, $A(\xi) \in R^{n \times n}$, $B(\xi) \in R^{n \times m}$;

$A(\xi) = [A_{ij}(\xi)]$, $B(\xi) = [B_{ij}(\xi)]$ - матрицы с параметрической неопределенностью; $x(\xi, t) = [x_i(\xi, t)]$ - вектор состояния системы; $u(\xi, t) = [u_i(\xi, t)]$ - вектор управления; ξ - вектор случайных процессов (СП).

Ставится задача синтеза управления стохастической динамической системой: найти закон управления с обратной связью в виде

$$u(\xi, t) = -Kx(\xi, t), \quad (2)$$

чтобы минимизировать целевой функционал

$$J = \int_{\Omega} \left\{ \int_0^{\infty} (x^T(\xi, t) Q x(\xi, t) + u^T(\xi, t) R u(\xi, t)) dt \right\} \rho(\xi) d\xi. \quad (3)$$

2 Решение задачи

Для решения задачи используется расширение полиномиального хаоса Винера-Аски [2,3], являющееся обобщением расширения оригинального винеровского хаоса, но с использованием полного ОПХ. Каждый компонент состояния системы $\{X_i(\xi)\}_{i=1}^{\infty}$ будет множеством ортогональных СП, представленных в виде

$$X(\xi, t) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i(t) \phi_i(\xi). \quad (4)$$

Каждая функция базиса ϕ_i ОПХ формирует ортогональный базис и означает среднее

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \langle \phi_i^2 \rangle \delta_{ij}, \quad (5)$$

где δ_{ij} - функция Кронекера, оператор $\langle \bullet, \bullet \rangle$ - среднее взвешенное произведение.

Для СП среднее взвешенное произведение $\langle \bullet, \bullet \rangle$ на гильбертовом пространстве определяется выражением

$$\langle \phi_i(\xi), \phi_j(\xi) \rangle = \int \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) \rho(\xi) d\xi = E[\phi_i(\xi) \phi_j(\xi)], \quad (6)$$

где $\rho(\xi)$ - весовая функция - функция плотности вероятности СП ξ , связанная с отдельной выборкой из ОПХ Винера-Аски, $E[*]$ - оператор математического ожидания, взятый по отношению к функции плотности вероятности соответствующего полиномиального базиса. Тогда среднее произведение ортогонального полинома базисных функций равно

$$E[\phi_i \phi_j] = E[\phi_i^2] \delta_{ij}.$$

Выборка базисных функций по схеме Винера-Аски зависит от распределения вероятности.

Каждый тип полинома из схемы Винера-Аски формирует комплексный базис в гильбертовом пространстве. В таблице 1 показаны некоторые общие распределения вероятностей и их связь с полиномиальным базисом в схеме Винера-Аски.

С помощью ОПХ [1-3] процессы $x(\xi, t)$, $u(\xi, t)$ и матрицы $A(\xi) = [A_{ij}(\xi)]$, $B(\xi) = [B_{ij}(\xi)]$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x_i(t, \xi) &= \sum_{k=0}^p x_{i,k}(t) \phi_k(\xi) = x_i^T(t) \Phi(\xi), \quad x_i(t) = [x_{i,0}(t), \dots, x_{i,p}(t)]^T, \\ u_i(t, \xi) &= \sum_{k=0}^p u_{i,k}(t) \phi_k(\xi) = u_i^T(t) \Phi(\xi), \quad u_i(t) = [u_{i,0}(t), \dots, u_{i,p}(t)]^T, \\ A_{ij}(\xi) &= \sum_{k=0}^p a_{ij,k} \phi_k(\xi) = a_{ij}^T \Phi(\xi), \quad a_{ij} = [a_{ij,0}, \dots, a_{ij,p}]^T, \\ B_{ij}(\xi) &= \sum_{k=0}^p b_{ij,k} \phi_k(\xi) = b_{ij}^T \Phi(\xi), \quad b_{ij} = [b_{ij,0}, \dots, b_{ij,p}]^T, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\{\phi_0(\xi), \dots, \phi_p(\xi)\}$ - базисные функции, зависящие от вида СП ξ (табл. 1); коэффициенты $a_{ij,k}$ и $b_{ij,k}$ получены методом проекцией Галеркина [3, 4] на $\{\phi_k\}_{k=0}^p$:

$$a_{ij,k} = \frac{\langle A_{ij}(\xi), \phi_k(\xi) \rangle}{\langle \phi_k(\xi)^2 \rangle}, \quad b_{ij,k} = \frac{\langle B_{ij}(\xi), \phi_k(\xi) \rangle}{\langle \phi_k(\xi)^2 \rangle}. \quad (8)$$

Обозначим

$$X_{ext} \in R^{n(p+1)} = [x_1^T, \dots, x_n^T]^T, \quad U_{ext} \in R^{m(p+1)} = [u_1^T, \dots, u_m^T]^T,$$

$$A_{ext} \in R^{n(p+1) \times n(p+1)} = [A_{ij}] = \sum_{k=0}^p a_{ij,k} \phi_k(\xi); \quad i, j = \overline{1, n}; \quad k = \overline{0, p},$$

$$B_{ext} \in R^{n(p+1) \times m(p+1)} = [B_{il}] = \sum_{k=0}^p b_{il,k} \phi_k(\xi); \quad i = \overline{1, n}; \quad l = \overline{1, m}; \quad k = \overline{0, p}.$$

Закон управления в форме обратной связи зависит от плотности вероятности СП и состояния системы (2) вида [1, 5]:

$$\sum_{k=0}^p u_{i,k}(t) \phi_k(\xi) = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^p k_{ij} x_{j,k}(t) \phi_k(\xi). \quad (9)$$

Закон управления является стохастическим из-за стохастической траектории состояния и входит в целевую функцию $E[U_{ext}^T R_u U_{ext}]$. Минимум целевой функций достигается с помощью оптимального управления

$$U_{ext}^* = -R_u^{-1} B_{ext}^T P X_{ext} = (K \otimes I_p) X_{ext}, \quad (10)$$

где $\otimes$ - произведение Кронекера.

Если управление оптимально, то целевой функционал принимает минимальное значение. Матрица K должна удовлетворять решению уравнения Риккати

$$A_{ext}^T P + P A_{ext} + (K^T \otimes I_p) B_{ext}^T P + P B_{ext} (K^T \otimes I_p) = 0.$$

В результате выбора структуры управления с обратной связью по состоянию получаем модель системы вида

$$\dot{X}_{ext}(t) = A_{ext} X_{ext}(t) + B_{ext} U_{ext}(t) = [A_{ext} + B_{ext} (K \otimes I_p)] X_{ext}. \quad (11)$$

Таким образом, мы преобразуем модель вида (1) с неопределенными параметрами в модель (11) с расширенной размерностью.

Таблица 1.

Связь ОПХ и типов случайного процесса ξ

Случайный процесс ξ	ОПХ $\Phi(\xi)$
Гауссова	Эрмит
Равномерная	Лежандр
гамма	Лагерр
бета	Якоби
пуассона	Шарлье

3 Пример

Применим метод ОПХ для решения задачи синтеза оптимального управления стохастической системой вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ x_2 &= -x_1 + \mu(\xi)(1 - x_1^2)x_2 + u,\end{aligned}\quad (12)$$

где $\mu(\xi)$ – СП с однородным распределением в области $[-1, 1]$. Базисными функциями являются полиномы Лежандра (см. табл. 1).

Для этого примера возьмем порядок полинома Лежандра $p=4$:

$$\phi_0 = 1, \quad \phi_1 = \xi, \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1), \quad \phi_3 = \frac{1}{2}(5\xi^2 - 3\xi), \quad \phi_4 = \frac{1}{8}(35\xi^3 - 30\xi^2 + 3).$$

Выполним ОПХ разложение $x_1(\xi, t)$, $x_2(\xi, t)$, $\mu(\xi)$. Система (12) после ОПХ разложения приобретает вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,m} &= x_{2,m}, \\ \dot{x}_{2,m} &= -x_{1,m} + \frac{1}{\langle \phi_m, \phi_m \rangle} \left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \mu_i x_{2,j} \ell_{ijm} - \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^p \mu_i x_{1,j} x_{1,k} x_{2,\ell} \ell_{ijk\ell m} + \langle u, \phi_m \rangle \right),\end{aligned}\quad (13)$$

где $l_{ijm} = \langle \phi_i, \phi_j, \phi_m \rangle = \int \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) \phi_m(\xi) \rho(\xi) d\xi$,

$$l_{ijklm} = \langle \phi_i, \phi_j, \phi_k, \phi_l, \phi_m \rangle = \int \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) \phi_k(\xi) \phi_l(\xi) \phi_m(\xi) \rho(\xi) d\xi.$$

Приведем численный пример. Для системы (12) заданы начальные условия $x_1(0)=3$, $x_2(0)=0$.

На рис. 1, 2 показаны результаты моделирования с помощью метода ОПХ и методом Монте-Карло. Красные линии - результаты, полученные методом ОПХ, зеленые - результаты, полученные методом Монте-Карло.

Рисунок 1 - Средние значения траектории состояния системы

Рисунок 2 – Оценки дисперсии траектории состояния системы

Результаты показывают, что оценки средних значений и оценки дисперсий, полученные ОПХ и метод Монте-Карло достаточно близки.

Заключение

Предложен метод разложения ОПХ позволяет анализировать линейные и нелинейные стохастические дифференциальные уравнения как детерминированные. Другие основные результаты представленного

метода включают в себя возможность решить задачи оптимального стохастического управления в виде детерминированной задачи.

Данный метод можно применять в задаче синтеза систем оптимального управления, а также в задаче идентификации нелинейных стохастических динамических объектов.

Литература

1. Beckmann P., Orthogonal Polynomials for Engineers and Physicists / P. Beckmann. - Golem Press, 1973, 280 p.
2. Datta K.B., Orthogonal Functions in Systems and Control / K.B Datta, B. M. Mohan. - World Scientific Press, 1995, 288 p.
3. Polyak B.T., Probabilistic robust design with linear quadratic regulators / B.T. Polyak and R. Tempo, - Systems and Control, 2001, V. 43, p. 343-353.
4. Sun J., Stochastic Dynamics and Control / J. Sun - Science Press, 2006, 417 p.
5. Пупков К.А. Методы робастного и адаптивного управления / К.А. Пупков - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.-744 с.

Synthesis of control in stochastic systems by generalized polynomial chaos

05, May 2012

DOI: 10.7463/0512.0410536

Pupkov K.A., Pham Xuan Phang

Russia, Bauman Moscow State Technical University

pupkov@iu1.bmstu.ru

phangvn@mail.ru

One of the main difficulties of analysis and synthesis of control in stochastic systems is the need of operation in multi-dimensional abstract spaces which are typically infinite-dimensional and difficult to interpret physically. A method was proposed to solve the problem of synthesis of control in stochastic systems using generalized polynomial chaos. The method allows to transform the original problem with a stochastic model into a problem with a deterministic model of high-dimensional state space of a dynamical system. This problem can be solved by known numerical methods.

Publications with keywords: [generalized polynomial chaos](#), [analysis and synthesis of control systems](#), [stochastic dynamic object](#)

Publications with words: [generalized polynomial chaos](#), [analysis and synthesis of control systems](#), [stochastic dynamic object](#)

References

1. Beckmann P. Orthogonal Polynomials for Engineers and Physicists. Golem Press, 1973. 280 p.
2. Datta K.B., Mohan B.M. *Orthogonal Functions in Systems and Control*. World Scientific Press, 1995. 288 p.
3. Polyak B.T., Tempo R. Probabilistic robust design with linear quadratic regulators. *Systems and Control*, 2001, vol. 43, pp. 343-353.
4. Sun J. *Stochastic Dynamics and Control*. Science Press, 2006, 417 p.
5. Pupkov K.A. *Metody robustnogo i adaptivnogo upravleniia* [Methods of robust and adaptive control]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2001. 744 p.