Кинетические явления в средах с микроструктурой как немарковские процессы

05, май 2012

DOI: 10.7463/0512.0366037

Скрипкин А. В.

УДК 519.62

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

skripkin@bmstu.ru

1. Введение

Описание кинетических процессов проводят, как правило, с использованием дифференциальных уравнений второго порядка (например, уравнения диффузии) [1]. Случайные воздействия, оказываемые на кинетический процесс, в этом случае учитывают путем добавления к соответствующему дифференциальному уравнению случайной силы или источника [2]. При указанном подходе описываемый кинетический процесс будет относиться к классу марковских процессов [1].

Описание кинетических процессов в средах с микроструктурой, а также при наличии частиц или протяженных объектов, характерные размеры которых относятся к области микро- и нанометров, сопряжено с рядом особенностей. Кинетический процесс в таких случаях может проявлять ярко выраженные наследственные свойства [2]. В частности, диффузия микрочастицы вызывает соответствующее движение окружающих ее частиц среды, которое, в свою очередь, начинает оказывать влияние на движение самой микрочастицы. Характер этого влияния в данный момент, очевидно, зависит от всей предыстории движения частицы, которое становится теперь немарковским процессом.

Типичные немарковские процессы широко распространены в природе. Примером немарковского процесса может служить фликкер-шум, наблюдаемый в процессах, имеющих различную физическую природу [3]. В частности, экспериментально наблюдаемые флуктуации кинетических коэффициентов (например, флуктуации коэффициента электропроводности) имеют спектральную плотность, характерную для фликкер-шума [4].

Отметим также, что при воздействии марковского случайного процесса на динамическую систему её отклик представляет собой немарковский случайный процесс. Сумма двух марковских процессов представляет собой немарковский процесс. Немарковскими будут также процессы, образованные при интегрировании марковского или нахождении скользящего среднего от процесса с независимыми значениями [5].

Любая фильтрация (как линейная, так и нелинейная) приводит к преобразованию марковского процесса в немарковский. Результатом большинства динамических измерений выступает немарковский процесс, так как в таких измерительных системах всегда осуществляется фильтрация входного воздействия.

Указанные соображения показывают, что при описании и анализе реальных физических процессов и технических устройств практически всегда приходится иметь дело с немарковскими случайными процессами, а модель марковского процесса может рассматриваться только как первое приближение.

Целью предлагаемой работы является описание кинетических процессов (диффузии и теплопроводности) в средах с микроструктурой. Рассматриваются сферические частицы микронанометрового размера, а также протяженные микронити. Показано, что указанные процессы следует рассматривать как немарковские процессы. Проведено статистическое описание явлений на основе разработанного метода описания немарковских процессов, задаваемых линейными интегральными преобразованиями. Впервые на относительно простых примерах показано, что использование теории марковских процессов к описанию кинетических процессов в средах с микроструктурой не совсем точно. Более адекватное описание данных процессов возможно только в рамках немарковской модели.

2. Стохастические дифференциальные уравнения

Кинетические процессы, происходящие в физических системах, традиционно описываются с помощью соответствующих дифференциальных уравнений. Так, при описании движения диффундирующей частицы обычно используется подход, основанный на применении стохастического уравнения Ланжевена [6]. Указанный подход позволяет воспользоваться хорошо разработанной теорией стохастических дифференциальных систем [1], с помощью которой можно определять все необходимые статистические характеристики флуктуаций скорости движения частицы.

Рассмотрим движение шарообразной частицы радиуса R и массы M в среде (жидкости или газе) с кинематической вязкостью ν и плотностью ρ . Уравнение движения такой частицы имеет вид

$$M \frac{dV(t)}{dt} = F_0(t) + F_c(t) + \xi_v(t). \quad (1)$$

где $V(t)$ – скорость частицы, $F_c(t)$ – сила сопротивления, $F_0(t)$ – сумма остальных внешних заданных сил.

Силу сопротивления $F_c(t) = F_{c0}(t)$ для линейной вязкой среды обычно записывают в виде

$$F_{c0}(t) = -\gamma V(t), \quad (2)$$

где γ – коэффициент вязкого трения, который для шарообразной частицы равен $\gamma = 6\pi\eta R$.

Считая спектральную плотность случайного процесса $\xi_v(t)$ равной

$$G_M = 2\gamma MkT, \quad (3)$$

где k – постоянная Больцмана, T – температура вязкой жидкости, в которой находится броуновская частица, спектральную плотность флуктуаций скорости $V(t)$ запишем как [6]

$$G_v(\omega) = \frac{\alpha}{\omega^2 + \beta^2}, \quad (4)$$

где $\alpha = 2\gamma kT/M$, $\beta = \gamma/M$.

Если случайный процесс $\xi_v(t)$ представляет собой производную от процесса с независимыми приращениями, то скорость $V(t)$ частицы описывается марковским случайным процессом, что позволяет определить для неё любые L -мерные характеристические функции, а, следовательно, и любые многомерные функции распределения [1].

Вообще говоря, теория стохастических дифференциальных систем дает возможность определять необходимые статистические характеристики случайного процесса $Z(t)$ в том случае, когда этот процесс удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dZ = a(Z, t)dt + b(Z, t)dW(t), \quad (5)$$

где $W(t)$ – процесс с независимыми приращениями. Процесс $Z(t)$ в этом случае является марковским процессом, статистические характеристики которого можно определить путем решения дифференциального уравнения для L -мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ [1].

Но существуют процессы, которые невозможно описать с помощью дифференциального уравнения (5). В частности, если случайный процесс $Z(t)$, описывается с помощью линейного интегрального преобразования

$$Z(t) = \int_0^t G(t, \tau) dW(\tau), \quad (6)$$

где $G(t, \tau)$ – непрерывная функция переменной τ , то этот процесс может не являться марковским процессом. Здесь считается, что интеграл (9) представляет собой интеграл Ито [7].

Из выражения (6) следует, что начальное условие для процесса $Z(t)$ имеет вид

$$Z(t)|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

а, следовательно, его одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda; t)$ принимает начальное условие [1]

$$g_1(\lambda; t)|_{t=0} = 1. \quad (8)$$

Если интегральное преобразование (6) имеет ядро $G(t, \tau)$, допускающее сведение уравнения (6) к конечномерной системе уравнений типа (5), то задача нахождения статистических характеристик процесса $Z(t)$ может быть решена стандартными методами теории стохастических дифференциальных систем [7]. Но в общем случае такое преобразование оказывается невозможным, что приводит к необходимости разработки адекватной методики нахождения статистических характеристик процесса $Z(t)$, описываемого уравнением (6).

3. Описание немарковского процесса, задаваемого линейным интегральным преобразованием

Рассмотрим общий метод нахождения L -мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ процесса $Z(t)$, описываемого линейным интегральным преобразованием (6) [16, 20].

Начнем с построения одномерной характеристической функции. Будем считать, что преобразование (6) представляет собой интеграл Ито [7]. Разобьем интервал $(0, t)$ на N равных интервалов, продолжительностью $\Delta t = t/N$. Моменты времени t_n , соответствующие окончаниям интервалов, удовлетворяют условию: $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t$. Тогда интеграл Ито в (6) можно заменить средним квадратическим пределом

$$Z(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} G(t, t_n) \Delta W(t_n), \quad (9)$$

где $\Delta W(t_n) = W(t_{n+1}) - W(t_n)$ – независимые приращения процесса $W(t_n)$.

Одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda; t)$ процесса $Z(t)$ выражается формулой

$$g_1(\lambda; t) = \langle \exp(i\lambda Z(t)) \rangle, \quad (10)$$

где операция $\langle \dots \rangle$ представляет собой нахождение математического ожидания. Подставляя в формулу (10) выражение (9) имеем

$$g_1(\lambda; t) = \left\langle \exp \left(i\lambda \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} G(t, t_n) \Delta W(t_n) \right) \right\rangle = \left\langle \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \exp(i\lambda G(t, t_n) \Delta W(t_n)) \right\rangle. \quad (11)$$

Так как приращения $\Delta W(t_n)$ являются независимыми, то последнее выражение в (11) приобретает вид

$$g_1(\lambda; t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \langle \exp(i\lambda G(t, t_n) \Delta W(t_n)) \rangle. \quad (12)$$

Логарифмирование выражения (12) дает

$$\ln g_1(\lambda; t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \ln h(\lambda; t; t_n), \quad (13)$$

где введено обозначение

$$h(\lambda; t; t_n) = \langle \exp(i\lambda G(t, t_n) \Delta W(t_n)) \rangle. \quad (14)$$

Учитывая то, что для процесса с независимыми приращениями характеристическая функция приращений записывается через его одномерную характеристическую функцию, имеем

$$h(\lambda; t; t_n) = \langle \exp(i\lambda G(t, t_n) \Delta W(t_n)) \rangle = \frac{\langle \exp(i\lambda G(t, t_n) W(t_{n+1})) \rangle}{\langle \exp(i\lambda G(t, t_n) W(t_n)) \rangle}. \quad (15)$$

Тогда

$$\ln h(\lambda; t; t_n) = \ln \langle \exp(i\lambda G(t, t_n) W(t_{n+1})) \rangle - \ln \langle \exp(i\lambda G(t, t_n) W(t_n)) \rangle. \quad (16)$$

Подстановка выражения (16) в формулу (13) дает

$$\ln g_1(\lambda; t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\ln \langle \exp(i\lambda G(t, t_n) W(t_{n+1})) \rangle - \ln \langle \exp(i\lambda G(t, t_n) W(t_n)) \rangle}{\Delta t} \Delta t. \quad (17)$$

После замены в формуле (17) суммирования интегралом Ито и последующего потенцирования получившегося выражения получим

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[\int_0^t \chi(\lambda G(t, \tau); \tau) d\tau \right], \quad (18)$$

где

$$\chi(\lambda G(t, \tau); \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \ln h_1(\lambda G(t, \tau); \tau), \quad (19)$$

$$h_1(\lambda G(t, \tau); \tau) = \langle \exp(i\lambda G(t, \tau) W(\tau)) \rangle. \quad (20)$$

Для случая, если процесс $W(t)$ является винеровским [1], имеем

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{1}{2} v \lambda^2 \int_0^t G^2(t, \tau) d\tau \right], \quad (21)$$

а если – пуассоновским [1], то

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[v \int_0^t (g(\lambda G(t, \tau)) - 1) d\tau \right]. \quad (22)$$

Аналогично для L -мерной характеристической функции можно получить

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[\int_0^{t_1} \chi \left(\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right); \tau \right) d\tau \right], \quad (23)$$

где

$$\chi \left(\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right); \tau \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \ln h_1 \left(\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right); \tau \right), \quad (24)$$

$$h_1 \left(\left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right); \tau \right) = \left\langle \exp \left(i \left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right) W(\tau) \right) \right\rangle. \quad (25)$$

При нахождении интеграла в выражении (23) необходимо учитывать условие

$$G(t_l, \tau) \Big|_{\tau > t_l} = 0. \quad (26)$$

Формулы (18) – (20) являются частными случаями выражений (23) – (25) при $L = 1$.

В том случае, если процесс $W(t)$ является винеровским, то

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{1}{2} v \sum_{l,k=1}^L \lambda_l \lambda_k \int_0^{\min(t_l, t_k)} G(t_l, \tau) G(t_k, \tau) d\tau \right], \quad (27)$$

а если пуассоновским, то

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[v \int_0^{t_1} \left(g \left(\sum_{l=1}^L \lambda_l G(t_l, \tau) \right) - 1 \right) d\tau \right]. \quad (28)$$

В общем случае, когда интегральное преобразование (6) не сводится к конечномерной системе дифференциальных уравнений, формулы (26), (27) и (28) описывают немарковский случайный процесс.

4. Движение микрочастицы в вязкой среде

При описании движения шарообразной микрочастицы с учетом увлечения частиц среды вместо формулы (2) необходимо использовать выражение [8]

$$F_c(t) = -2\pi\rho R^3 \left[\frac{1}{3} \frac{dV(t)}{dt} + \frac{3v}{R^2} V(t) + \frac{3}{R} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \quad (29)$$

Здесь момент времени $t = 0$ принят за начало движения частицы.

Подставляя (29) в (1), получим уравнение

$$\left(M + \frac{2}{3} \pi \rho R^3 \right) \frac{dV(t)}{dt} + 6\pi\rho v R V(t) + 6\pi R^2 \sqrt{\pi v} \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = F_0(t) + \xi_v(t). \quad (30)$$

Введя замены

$$Z(t) = \frac{dV(t)}{dt}, \quad A = \frac{6\pi\rho v R}{M + \frac{2}{3} \pi \rho R^3}, \quad B = R \sqrt{\frac{1}{\pi v}}, \quad \tilde{F}_0(t) = \frac{F_0(t)}{M + \frac{2}{3} \pi \rho R^3}, \quad \tilde{\xi}(t) = \frac{\xi_v(t)}{M + \frac{2}{3} \pi \rho R^3}, \quad (31)$$

придем к выражению

$$Z(t) + A \int_0^t \left(1 + \frac{B}{\sqrt{t-\tau}} \right) Z(\tau) d\tau = \tilde{F}_0(t) + \tilde{\xi}(t), \quad (32)$$

в котором учтено, что

$$V(t) = \int_0^t \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (33)$$

т.к. $V(0) = 0$. Выражение (32) описывает случайный процесс $Z(t)$, являющийся в этом случае немарковским случайным процессом [17]. Таким образом, использование для силы сопротивления выражения (29) вместо (2) приводит к необходимости применения интегральных уравнений, а, следовательно, и теории немарковских процессов [2].

Решение интегрального уравнения (32) имеет вид [20]

$$Z(t) = \int_0^t (\delta(t-\tau) - R(t, \tau)) (\tilde{F}_0(t) + \tilde{\xi}(t)) d\tau, \quad (34)$$

где резольвента

$$R(t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t, \tau). \quad (35)$$

В последнем выражении члены ряда определяются с помощью рекуррентного соотношения

$$K_{n+1}(t, \tau) = \int_{\tau}^t K_1(t, s) K_n(s, \tau) ds, \quad (36)$$

где

$$K_1(t, \tau) = A \left(1 + \frac{B}{\sqrt{t-\tau}} \right). \quad (37)$$

Вычисление по формуле (36) приводит к выражениям для первых членов ряда

$$K_2(t, \tau) = -A^2 \left((t-\tau) + 4B(t-\tau)^{1/2} + \pi B^2 \right), \quad (38)$$

$$K_3(t, \tau) = A^3 \left[\frac{1}{2} (t - \tau)^2 + 4B(t - \tau)^{3/2} + 3\pi B^2(t - \tau) + 2\pi B^3(t - \tau)^{1/2} \right]. \quad (39)$$

Из выражений (37) – (39) видно, что ряд (35) является знакочередующимся, причем резольвента $R(t, \tau)$ является функцией только от разности аргументов: $R(t, \tau) = R(t - \tau)$. Видно также, что абсолютные значения членов ряда (за исключением первого) возрастают при росте $t - \tau$ таким образом, что $|K_n(t - \tau)| \rightarrow \infty$ при $(t - \tau) \rightarrow \infty$. Для не слишком больших t ($t \leq 10$ с) и $A \ll 1$ с⁻¹ ряд (35) с большой степенью точности можно заменить суммой

$$R(t - \tau) = A - \pi A^2 B^2 + \frac{AB}{\sqrt{t - \tau}} - 4BA^2 \sqrt{t - \tau}. \quad (40)$$

Будем далее считать, что $\tilde{F}_0(t) = 0$. В этом случае (34) примет вид

$$Z(t) = \int_0^t [\delta(t - \tau) - R(t - \tau)] \tilde{\xi}(\tau) d\tau. \quad (41)$$

Используя метод описания немарковских случайных процессов, изложенный выше, для одномерной и L -мерной характеристических функций случайного процесса $Z(t)$, задаваемого интегральным уравнением (41), для не слишком больших t ($t \leq 10$ с) и $A \ll 1$ с⁻¹ получим

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{1}{2} \tilde{\sigma} \lambda^2 \left(A^2 B^2 \ln \frac{t}{\delta t} - 4ABC\sqrt{t} + (C^2 - 8A^2 B^2)t + \frac{16}{3} A^2 BC\sqrt{t^3} + 8A^4 B^2 t^2 \right) \right], \quad (42)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\tilde{\sigma} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L \lambda_l \lambda_k Q_{lk}(t_l, t_k) \right]. \quad (43)$$

Здесь $\tilde{\sigma}$ – интенсивность случайного процесса $\tilde{\xi}(t)$, δt – малая положительная величина, а функция $Q_{lk}(t_l, t_k)$ имеет вид

$$\begin{aligned} Q_{lk}(t_l, t_k) = & \frac{1}{2} C^2 t_k - ABC(\sqrt{t_l} + \sqrt{t_k} - \sqrt{t_l - t_k}) + \\ & + \frac{4}{3} A^2 BC(\sqrt{t_l^3} + \sqrt{t_k^3} - \sqrt{(t_l - t_k)^3}) - 4A^3 B^2 \sqrt{t_k t_l} + \\ & + A^2 B^2 (1 + 8A^2(t_l - t_k)) \ln \frac{\sqrt{t_k} + \sqrt{t_l}}{\sqrt{t_l - t_k} + \sqrt{\delta t}} + 4A^4 B^2 \sqrt{t_k t_l^3}. \end{aligned} \quad (44)$$

В выражениях (42) и (44) $C = -A + \pi A^2 B^2$.

Многомерные характеристические функции $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$, задаваемые выражением (43), позволяют найти моменты любого порядка случайного процесса $Z(t)$ [1]. В частности, для корреляционной функции получим

$$\langle Z(t_1) Z(t_2) \rangle = 2\tilde{\sigma} Q_{12}(t_1, t_2). \quad (45)$$

Для нахождения спектральной плотности случайного процесса $Z(t)$ найдем преобразование Лапласа уравнения (34) при $\tilde{F}_0(t)=0$, что позволяет записать его в изображениях

$$\hat{Z}(p) \left[1 + A \left(\frac{1}{p} + \frac{B\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \right) \right] = \hat{\xi}(p) \quad (46)$$

где $\hat{Z}(p)$ и $\hat{\xi}(p)$ – изображения функций $Z(t)$ и $\xi(t)$ соответственно.

Ввиду того, что спектральная плотность $G_{\xi} = \tilde{\sigma}$ процесса $\xi(t)$ постоянна и равна

$$G_{\xi} = \frac{12\pi\rho\nu RkT}{\left(M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3 \right)^2}, \quad (47)$$

то в соответствии с формулой (46) спектральная плотность процесса $Z(t)$ при $t \rightarrow \infty$ принимает вид

$$G_Z(\omega) = \left| \frac{i\omega}{i\omega + AB\sqrt{\pi \cdot i\omega} + A} \right|^2 G_{\xi} \quad (48)$$

или

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + AB\sqrt{2\pi\omega^3} + A^2B^2\pi\omega + A^2B\sqrt{2\pi\omega} + A^2} G_{\xi}. \quad (49)$$

Из последнего выражения может быть найдена спектральная плотность флуктуаций скорости броуновской частицы $V(t)$. Согласно выражению (31) спектральная плотность

$$G_V(\omega) = \frac{G_Z(\omega)}{\omega^2}, \text{ или}$$

$$G_V(\omega) = \frac{G_{\xi}}{\omega^2 + AB\sqrt{2\pi\omega^3} + A^2B^2\pi\omega + A^2B\sqrt{2\pi\omega} + A^2}. \quad (50)$$

Сравнение формул (50) и (4) показывает, что использование для силы сопротивления выражения (29) вместо (2) приводит к существенному различию спектральных плотностей флуктуаций скорости частицы, в особенности, в полосе низких и средних частот. На рис. 1 показаны в сравнении графики спектральных плотностей, даваемые формулами (4) и (50).

Рис. 1. Графики спектральных плотностей, задаваемые формулами (4) (кривая 2) и (50) (кривая 1) при $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $R = 10^{-4} \text{ м}$, $M = 4 \cdot 10^{-9} \text{ кг}$, $T = 300 \text{ К}$

Пусть теперь на сферическую частицу вдоль оси X кроме случайной силы и силы сопротивления действует возвращающая сила $F_0(t) = -kX(t)$. В этом случае уравнение (32) примет вид

$$Z(t) + A \int_0^t \left(1 + \frac{B}{\sqrt{t-\tau}} \right) Z(\tau) d\tau = -\tilde{k}X(t) + \tilde{\xi}(t), \quad (51)$$

где

$$\tilde{k} = \frac{k}{M + \frac{2}{3}\pi\rho R^3}. \quad (52)$$

Найдем в этом случае спектральные плотности процессов $Z(t)$ и $V(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Учтя, что преобразование Лапласа функций $X(t)$ и $Z(t)$ связаны соотношением $\hat{X}(p) = \hat{Z}(p)/p^2$, для уравнения (51) в изображениях имеем

$$\hat{Z}(p) \left[1 + \frac{k}{p^2} + \frac{AB\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} + \frac{A}{p} \right] = \hat{\xi}(p). \quad (53)$$

Выполнив процедуру, проведенную при выводе формул (49) и (50), для спектральных плотностей процессов $Z(t)$ и $V(t)$ получим

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega^4}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G_{\xi}, \quad (54)$$

$$G_V(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7} + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5} + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3} + \tilde{k}^2} G_{\xi}. \quad (55)$$

Из (55) легко найти спектральную плотность для $X(t)$ в виде

$$G_X(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + AB\sqrt{2\pi\omega^7 + A^2B^2\pi\omega^3 + A^2B\sqrt{2\pi\omega^5 + (A^2 - 2\tilde{k})\omega^2 - \tilde{k}AB\sqrt{2\pi\omega^3 + \tilde{k}^2}}} G'_\xi. \quad (56)$$

Сравним последнее выражение со спектральной плотностью классического осциллятора, которая получается из (56) при условии, что $B = 0 \text{ с}^{1/2}$, а в формулах (31) (для коэффициента A), (47) и (52) слагаемое $\frac{2}{3}\pi\rho R^3$, стоящее в знаменателе, обращается в нуль.

В этом случае (56) переходит в формулу

$$G_X^{\text{клас}}(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + (A'^2 - 2k')\omega^2 + k'^2} G'_\xi, \quad (57)$$

где теперь $A' = \frac{6\pi\rho\nu R}{M}$, $k' = \frac{k}{M}$, $G'_\xi = \frac{12\pi\rho\nu RkT}{M^2}$.

На рис. 2 и 3 изображены спектральные плотности, задаваемые выражениями (56) и (57) при $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $k = 10^{-2} \text{ Н/м}$, $R = 10 \text{ мкм}$ (рис. 2), $R = 100 \text{ мкм}$ (рис. 3). Плотность частицы при этом принимается равной плотности среды.

Рис. 2. Графики спектральных плотностей, задаваемые выражениями (56) (кривая 1) и (57) (кривая 2) при $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $k = 10^{-2} \text{ Н/м}$, $R = 10 \text{ мкм}$

Рис. 3. Графики спектральных плотностей, задаваемые выражениями (56) (кривая 1) и (57) (кривая 2) при $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $k = 10^{-2} \text{ Н/м}$, $R = 100 \text{ мкм}$

Из графиков видно, что с увеличением размера частиц формы кривых становятся похожими, при этом классическому случаю соответствует большее амплитудное значение спектральной плотности. Этот эффект становится наиболее заметным при больших размерах частиц. Видно также, что максимум спектральной плотности в классическом случае соответствует более высокой резонансной частоте. Этот факт является следствием того, что при неклассическом описании к массе частицы добавляется некоторая «эффективная» масса $\frac{2}{3}\pi\rho R$.

Таким образом, проведенное описание движения броуновской частицы шарообразной формы в неограниченной вязкой среде позволило установить, что флуктуации её скорости представляют собой немарковский случайный процесс. Полученные резонансные кривые для механического осциллятора, размещенного в вязкой безграничной среде, по своей форме отличается от классической. Последний результат может иметь существенное значение для устройств демпфирования колебаний.

5. Движение частицы на малых временных интервалах

Для рассмотрения движения микрочастицы на малых временных интервалах, на которых её взаимодействие со средой оказывается весьма существенным, проведем преобразование Лапласа исходного уравнения (32).

Перед проведением преобразования Лапласа перепишем выражение (32), представив его в виде

$$M \frac{dV(t)}{dt} + \int_0^t \gamma(t-\tau) \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau = F(t) + \xi_v(t), \quad (58)$$

где функция $\gamma(t-\tau)$ имеет смысл ядра коэффициента трения и определяется выражением

$$\gamma(t-\tau) = 6\pi\rho\nu R + \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \delta(t-\tau) + \frac{6\rho R^2 \sqrt{\pi\nu}}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (59)$$

Преобразование Лапласа соотношения (58) приводит к равенству

$$Mp^2 \hat{X}(p) + \hat{\gamma}(p)p^2 \hat{X}(p) = \hat{F}(p) + \hat{\xi}_v(p), \quad (60)$$

где p – параметр преобразования, $\hat{X}(p) = \hat{Z}(p)/p^2$, $\hat{F}(p)$, $\hat{\xi}_v(p)$, $\hat{\gamma}(p)$ – преобразования Лапласа координаты броуновской частицы $X(t)$, внешней детерминированной силы $\hat{F}_0(t)$, случайного воздействия $\xi_v(t)$ и ядра $\gamma(t)$ соответственно. Полагая далее движение броуновской частицы свободным, при котором внешняя сила $F(t)$ равна нулю, из (60) найдем

$$\hat{X}(p) = \frac{\hat{\xi}_v(p)}{p^2(M + \hat{\gamma}(p))}. \quad (61)$$

Последнее выражение позволяет записать формулу для нахождения зависимости координаты броуновской частицы $X(t)$ от времени в виде свертки

$$X(t) = \int_0^t G_X(t-\tau) \xi_v(\tau) d\tau, \quad (62)$$

где для преобразования Лапласа искомого ядра $G_X(t)$ имеем выражение

$$\hat{G}_X(p) = \frac{1}{p^2(M + \hat{\gamma}(p))}, \quad (63)$$

в котором согласно (59) преобразование функции $\gamma(t)$ определяется как

$$\hat{\gamma}(p) = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 + \frac{6\pi\rho R^2 \sqrt{\nu}}{\sqrt{p}} + \frac{6\pi\rho\nu R}{p}. \quad (64)$$

Рассматриваемому интегральному преобразованию (62), как следует из вышеизложенного, соответствуют следующие одномерная $g_1(\lambda; t)$ и многомерная $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ характеристические функции

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{1}{2} \nu_w \lambda^2 \int_0^t G_X^2(t-\tau) d\tau \right], \quad (65)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{1}{2} \nu_w \sum_{l,k=1}^L \lambda_l \lambda_k \int_0^{\min(t_l, t_k)} G_X(t_l - \tau) G_X(t_k - \tau) d\tau \right]. \quad (66)$$

Здесь ν_w – интенсивность внешнего случайного воздействия.

Из (63) и (64) найдем

$$\hat{G}(p) = \frac{1}{ap(p + b\sqrt{p + c})}, \quad (67)$$

где введены обозначения

$$a = M + \frac{4}{3}\pi\rho R^3, \quad b = \frac{6\pi\rho R^2\sqrt{\nu}}{a}, \quad c = \frac{6\pi\rho\nu R}{a}. \quad (68)$$

Выражение (67) не позволяет в общем случае найти обратное преобразование Лапласа. Однако, если $b > 2\sqrt{c}$, то (67) может быть представлено в виде

$$\frac{1}{ap(p + b\sqrt{p + c})} = \frac{1}{a} \left(\frac{y_1}{p} + \frac{y_2}{\sqrt{p}} + \frac{y_3}{\sqrt{p - x_1}} + \frac{y_4}{\sqrt{p - x_2}} \right), \quad (69)$$

где

$$x_1 = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4c}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4c}), \quad (70)$$

$$y_1 = \frac{1}{c}, \quad y_2 = -\frac{b}{c^2}, \quad y_3 = \frac{b^2 + b\sqrt{b^2 - 4c} - 2c}{2c^2\sqrt{b^2 - 4c}}, \quad y_4 = \frac{-b^2 + b\sqrt{b^2 - 4c} + 2c}{2c^2\sqrt{b^2 - 4c}}. \quad (71)$$

Заметим, что необходимое условие $b > 2\sqrt{c}$ удовлетворяется для широкого диапазона частиц и сред, соответствующих реальным условиям. В частности, при движении частицы радиусом $R = 1$ мкм в воде (при нормальных условиях плотность $\rho = 1000$ кг/м³, кинематическая вязкость $\nu = 10^{-6}$ м²/с) неравенство $b > 2\sqrt{c}$ удовлетворяется при $M < 5,2 \cdot 10^{-16}$ кг (легкие пористые частицы). В дальнейшем в качестве тестовой частицы (имея в виду последующее сравнение с результатами экспериментальных исследований) будем брать частицу плотностью $\rho_0 = 100$ кг/м³ и радиусом $R = 0,1$ мкм, движущуюся в воде.

Обратное преобразование функции (67) при учете (69) приводит к следующей формуле для ядра $G_x(t - \tau)$ исходного преобразования (62):

$$G_x(t - \tau) = \frac{1}{a} \left[y_1 + \frac{y_2 + y_3 + y_4}{\sqrt{\pi(t - \tau)}} + \right. \\ \left. + x_1 y_3 \exp(x_1^2(t - \tau)) \operatorname{erfc}(-x_1\sqrt{t - \tau}) + x_2 y_4 \exp(x_2^2(t - \tau)) \operatorname{erfc}(-x_2\sqrt{t - \tau}) \right]. \quad (72)$$

Здесь функция $\operatorname{erfc}(x)$ представляет собой дополнительный интеграл ошибок. Из определения переменных y_2 , y_3 и y_4 следует, что $y_2 + y_3 + y_4 = 0$. Тогда окончательно получим

$$G_X(t-\tau) = \frac{1}{a} \left[y_1 + x_1 y_3 \exp(x_1^2(t-\tau)) \operatorname{erfc}(-x_1 \sqrt{t-\tau}) + x_2 y_4 \exp(x_2^2(t-\tau)) \operatorname{erfc}(-x_2 \sqrt{t-\tau}) \right]. \quad (73)$$

Найденное выражение (73) принципиально позволяет определить средний квадрат смещения частицы $\langle X^2(t) \rangle$ согласно формуле

$$\langle X^2(t) \rangle = \frac{\partial^2 g_1(\lambda; t)}{\partial (i\lambda)^2} \Big|_{\lambda=0}, \quad (74)$$

где характеристическая функция $g_1(\lambda; t)$ задается выражением (65).

При больших $t-\tau$, в связи с тем, что функция $\operatorname{erfc}(x)$ убывает быстрее возрастания функции $\exp(x^2)$, ядро $G_X(t-\tau)$, как следует из (72), сводится к постоянной величине

$$G_X(t-\tau) \Big|_{t-\tau \rightarrow \infty} = \frac{y_1}{a}. \quad (75)$$

В этом случае из соотношений (65) и (74) получим

$$\langle X^2(t) \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty} = v_w \frac{y_1^2}{a^2} t = v_w \frac{1}{a^2 c^2} t = \frac{2\gamma_0 kT}{\gamma_0^2} t = \frac{2kT}{\gamma_0} t = 2D_p t, \quad (76)$$

что совпадает с известной формулой Эйнштейна.

Для приближенного нахождения величины $\langle X^2(t) \rangle$ на малых временных интервалах (порядка $10^{-3} - 10^{-2}$ с) в выражении (73) можно разложить функции $\exp(x)$ и $\operatorname{erfc}(x)$ в ряд. Ввиду того, что величины x_1 и x_2 , вообще говоря, принимают большие значения (для тестовой частицы $\sim 10^4 \text{ c}^{-1/2}$), то следует удержать значительное число слагаемых разложения функций $\exp(x)$ и $\operatorname{erfc}(x)$. Оставив 30 слагаемых ряда, можно найти, что для значений $t-\tau < 10^{-3}$ с функция $G_X(t-\tau)$ хорошо аппроксимируется зависимостью

$$G_X(t-\tau) \Big|_{t-\tau \rightarrow 0} = \frac{3,5 \cdot 10^{-8} (t-\tau)^{0,5}}{a}. \quad (77)$$

Использование найденной аппроксимирующей зависимости для ядра $G_X(t-\tau)$ позволяет найти, после подстановки выражения (77) в формулу (65) и последующего применения (74), что для малых t среднее значение квадрата смещения броуновской частицы задается квадратичной по времени функцией

$$\langle X^2(t) \rangle \Big|_{t \rightarrow 0} = 2D\alpha t^2, \quad (78)$$

где параметр $\alpha \approx 210 \text{ c}^{-1}$.

Проведенные в работах [9, 10] экспериментальные исследования броуновского движения частицы (параметры которой близки к рассматриваемой нами выше тестовой частицы) в вязкой среде на малых временных и пространственных интервалах показали, что для времен порядка $10^{-3} - 10^{-2}$ с средний квадрат смещения хорошо описывается полученной выше зависимостью (78) (при этом в экспериментах, в которых частица двигалась в воде, получалось значение $\alpha = 180 \text{ с}^{-1}$), а на больших временных (более 10^{-1} с) и пространственных интервалах удовлетворительной является классическая формула (76), что также следует из рассматриваемой выше теории.

Хорошая согласованность полученных результатов, базирующихся на формуле (29) для силы сопротивления, с соответствующими экспериментами на малых и больших временных интервалах, говорит о правомерности использования выражения (29) при учете взаимодействия движущейся микрочастицы и частиц среды, приводящего к увлечению среды микрочастицей.

Таким образом, проведенное описание движения броуновской частицы шарообразной формы в неограниченной вязкой среде, учитывающее ее взаимодействие с окружающими частицами среды, позволило установить, что флуктуации её скорости представляют собой немарковский случайный процесс. Найденные статистические характеристики броуновского движения имеют существенное отличие от аналогичных характеристик, получаемых при классическом описании броуновского движения, использующего методы теории стохастических дифференциальных систем. Наиболее ярко отличие в движении броуновской частицы проявляется на малых временных и пространственных интервалах, что обусловлено принципиальной необходимостью учета на таких интервалах взаимодействия броуновской частицы и частиц среды.

6. Диффузия в пространстве, окружающем микрочастицы жидкости.

Испарение микрокапель

Рассмотрим неподвижную каплю жидкости сферической формы с первоначальным радиусом R_0 , вокруг которой происходит диффузия частиц пара (рис. 4). Начало сферической системы координат поместим в центр капли. Концентрацию насыщенного пара жидкости капли обозначим через n_0 , а концентрацию пара у поверхности будем считать некоторой произвольной функцией времени и обозначим как $n_R(t)$. Также будем предполагать коэффициент диффузии D постоянным. Массу одной частицы жидкости

обозначим через m . Будем рассматривать случай окружающей каплю атмосферы, первоначально полностью насыщенную паром жидкости [18].

Очевидно, ввиду симметрии рассматриваемой задачи концентрация частиц пара будет зависеть только от расстояния до центра капли r , а также времени t . Уравнение диффузии в сферических координатах для такого случая принимает вид

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = \frac{D}{r} \frac{\partial^2 (rn(r,t))}{\partial r^2}. \quad (79)$$

Граничные и начальные условия записываются согласно сказанному выше с помощью выражений

$$n(r,t)|_{r=R} = n_R(t), \quad (80)$$

$$n(r,t)|_{t=0} = n_0. \quad (81)$$

Заметим, что в условии (80) радиус частицы R является величиной, в общем случае зависящей от времени.

Рис. 4. Диффузия пара над поверхностью частицы сферической формы

Принимая за положительное направление потока частиц с поверхности $q(t)$ направление вдоль координаты r , и считая, что этот поток пропорционален разности концентраций $n_R(t)$ и n_0 , получим

$$q(t) = -\alpha(n_R(t) - n_0) + \xi_q(t). \quad (82)$$

В последнем выражении учтены флуктуации потока частиц, выражаемые последним слагаемым $\xi_q(t)$. Величина α – коэффициент аккомодации.

Очевидно, поток испаряющихся частиц $q(t)$ удовлетворяет также общей формуле

$$q(t) = -D \frac{\partial n}{\partial r} \bigg|_{r=R}. \quad (83)$$

Для потока массы $q_m(t)$, равного количеству массы частиц, испарившихся (конденсировавшихся) с единицы площади в единицу времени, получим

$$q_m(t) = -m\alpha(n_R(t) - n_0) + \xi_{q_m}(t), \quad (84)$$

$$q_m(t) = -mD \left. \frac{\partial n}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (85)$$

В выражении (84) случайный массовый поток $\xi_{q_m}(t) = m\xi_q(t)$.

Приравнявая соотношения (84) и (85), получим

$$-mD \left. \frac{\partial n}{\partial r} \right|_{r=R} = -m\alpha(n_R(t) - n_0) + \xi_{q_m}(t). \quad (86)$$

Рассмотрим прежде всего задачу в предположении постоянства радиуса частицы: $R(t) = R_0$. Такое приближение физически обосновано для случая частиц большого радиуса, а также при относительно коротком времени наблюдения процессов диффузии, в течение которого изменением размеров капель можно пренебречь.

Решим систему уравнений (79) – (81). Для этого введем вспомогательную функцию $F(r, t)$, определяемую выражением

$$n(r, t) = \frac{F(r, t)}{r}. \quad (87)$$

Подстановка последнего выражения в (79) – (81) приводит к системе уравнений для функции $F(r, t)$

$$\frac{\partial F(r, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 F(r, t)}{\partial r^2}, \quad (88)$$

$$F(r, t)|_{r=R} = R_0 n_R(t), \quad (89)$$

$$F(r, t)|_{t=0} = n_0 r, \quad r > R_0. \quad (90)$$

Из записанных выражений (88) – (90) видно, что функция $F(r, t)$ формально соответствует одномерному уравнению диффузии. Поэтому решение поставленной задачи имеет вид [11]

$$F(r, t) = \frac{R_0}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{r - R_0}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(r - R_0)^2}{4D(t - \tau)}\right] n_R(\tau) d\tau. \quad (91)$$

Заметим, что в записанном соотношении (91) уже учтено, что между потоком, связанным с начальной концентрацией частиц пара, и потоком испаряющейся жидкости почти сразу устанавливается динамическое равновесие, поэтому слагаемое, связанное с наличием начальной концентрации, в (91) опущено.

Найдем производную $\left. \frac{\partial F(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R}$, принимая во внимание соотношение (85). Получим

$$\left. \frac{\partial F(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{R_0}{mD} q_m(t) + n_R(t). \quad (92)$$

Производная последнего выражения по координате r определяется из уравнения (91) и равна

$$\frac{\partial F(r,t)}{\partial r} = \frac{R_0}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \left[\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} - \frac{(r-R_0)^2}{2D(t-\tau)^{5/2}} \right] \exp \left[-\frac{(r-R_0)^2}{4D(t-\tau)} \right] n_R(\tau) d\tau. \quad (93)$$

Вычисление полученного интеграла (93) по частям дает

$$\frac{\partial F(r,t)}{\partial r} = -\frac{R_0}{\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp \left[-\frac{(r-R_0)^2}{4D(t-\tau)} \right] \frac{dn_R(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (94)$$

Сравнивая (92) и (94), получим выражение для массового потока $q_m(t)$ в виде

$$q_m(t) = \frac{mD}{R_0} \int_0^t \left(\frac{R_0}{\sqrt{\pi D}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + 1 \right) \frac{dn_R(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (95)$$

Введем замены с помощью формул

$$\delta n(t) = n_R(t) - n_0, \quad (96)$$

$$Z(t) = \frac{d\delta n(t)}{dt}. \quad (97)$$

С использованием обозначений (96) и (97), из выражений (84) и (85) окончательно получим

$$m \int_0^t \left(\sqrt{\frac{D}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + \alpha + \frac{D}{R_0} \right) Z(\tau) d\tau = \xi_{q_m}(t). \quad (98)$$

Таким образом, случайный процесс $Z(t)$ описывается с помощью линейного интегрального оператора Вольтерра первого рода, ядро которого имеет вид суммы слагаемого абелевого типа, постоянной величины и величины, зависящей от радиуса сферической частицы. Описание случайного процесса $Z(t)$ с помощью интегрального оператора вида (98) указывает на немарковский характер рассматриваемого процесса. Укажем также на то, что величина $\delta n(t)$ также в общем случае является немарковским случайным процессом, так как представляет собой интеграл по времени от немарковского процесса $Z(t)$.

Преобразование Лапласа уравнения (98) приводит к уравнению

$$\left(\sqrt{\frac{D}{p}} + \frac{\alpha}{p} + \frac{D}{R_0 p} \right) m \hat{Z}(p) = \hat{\xi}_{q_m}(p), \quad (99)$$

где p – параметр преобразования. Из последней формулы находим

$$\hat{Z}(p) = \frac{p}{m(\sqrt{Dp} + \beta)} \hat{\xi}_{q_m}(p), \quad (100)$$

где введена замена

$$\beta = \alpha + \frac{D}{R_0}. \quad (101)$$

Воспользовавшись определением (97), получим

$$\delta \hat{n}(p) = \frac{1}{m(\sqrt{Dp} + \beta)} \hat{\xi}_{q_m}(p). \quad (102)$$

Так как интеграл в левой части (98) представляет собой свертку, то решение для функции $\delta n(t)$ будем также искать в виде интегрального оператора Вольтерра первого рода, имеющего вид свертки

$$\delta n(t) = \int_0^t K(t - \tau) \xi_{q_m}(\tau) d\tau. \quad (103)$$

Здесь $K(t - \tau)$ – некоторая функция, которую следует найти.

В связи с тем, что массовый поток $q_m(t)$ и величина $\delta n(t)$ связаны соотношением (84), из (103) получим

$$q_m(t) = \int_0^t Y(t - \tau) \xi_{q_m}(\tau) d\tau, \quad (104)$$

где

$$Y(t - \tau) = \delta(t - \tau) - \alpha m K(t - \tau). \quad (105)$$

Выполняя преобразование Лапласа выражения (103) и приравнявая полученный образ $\delta \hat{n}(p)$ выражению (102), для образа ядра интеграла (103) $\hat{K}(p)$ получим

$$\hat{K}(p) = \frac{1}{m(\sqrt{Dp} + \beta)}. \quad (106)$$

Выполнив теперь обратное преобразование Лапласа выражения (106) [9, с. 210], будем иметь

$$K(t - \tau) = \frac{1}{m\sqrt{D}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t - \tau)}} - \frac{\beta}{\sqrt{D}} \exp\left[\frac{\beta^2(t - \tau)}{D} \right] \operatorname{erfc}\left[\frac{\beta\sqrt{t - \tau}}{\sqrt{D}} \right] \right\}, \quad (107)$$

где $\operatorname{erfc}(x)$ – дополнительный интеграл ошибок. Ввиду того, что функция $\operatorname{erfc}(x)$ убывает быстрее с ростом x по сравнению с ростом величины $\exp(x^2)$, то при $(t-\tau) \rightarrow \infty$ ядро $K(t-\tau)$ стремится к нулю.

Рис. 5. График функции $K(t-\tau)$, задаваемый выражением (107)

График функции $K(t-\tau)$ схематически представлен на рис. 5. При этом принималось, что значения соответствующих параметров (в данном случае – массы частицы m , коэффициента диффузии D , коэффициента α и радиуса сферической капли R_0) равны единице. Это также было обусловлено тем, что быстрый рост экспоненты в (107) и одновременное очень быстрое убывание функции $\operatorname{erfc}(x)$ затрудняло расчеты с использованием реальных параметров. Однако, очевидно, что для таких параметров функция $K(t-\tau)$ будет вести себя аналогичным образом.

Аппроксимация построенного графика степенной функцией с хорошим приближением дает для значений $(t-\tau) > 0,05$ с обратно пропорциональную зависимость функции $K(t-\tau)$ от разности $t-\tau$:

$$K(t-\tau) = \frac{0,06}{t-\tau}. \quad (108)$$

Применяя метод, изложенный ранее, для одномерной $g_1(\lambda; t)$ и L -мерной $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ характеристических функций случайного процесса $\delta n(t)$ получим соответственно выражения

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma \lambda^2 \int_0^t K^2(t-\tau) d\tau \right], \quad (109)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma \left(\sum_{k=1}^L \lambda_k^2 \int_0^{t_k} K^2(t_k - \tau) d\tau + 2 \sum_{\substack{k,l=1, \\ k < l}}^L \lambda_k \lambda_l \int_0^{t_k} K(t_k - \tau) K(t_l - \tau) d\tau \right) \right]. \quad (110)$$

Рис. 6. Графики функции $g_1(\lambda; t)$ при $t = 5 \cdot 10^{-6}$ с (кривая 1) и $t = 1$ с (кривая 2)

Схематический график функции $g_1(\lambda; t)$ для различных t изображен на рис. 6. Из него видно, что одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda; t)$ имеет вид гауссовой кривой, ширина которой уменьшается с увеличением t .

Полученные характеристические функции позволяют найти любые статистические характеристики случайного процесса $\delta n(t)$. В частности, для его математического ожидания $\langle \delta n(t) \rangle$ и момента второго порядка $\langle \delta n(t_1) \delta n(t_2) \rangle$ имеем выражения

$$\langle \delta n(t) \rangle = \left. \frac{\partial g_1(\lambda; t)}{i \partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0, \quad (111)$$

$$\langle \delta n(t_1) \delta n(t_2) \rangle = \left. \frac{\partial^2 g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)}{i \partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \right|_{\substack{\lambda_1=0, \\ \lambda_2=0}} = \sigma \int_0^{t_1} K(t_1 - \tau) K(t_2 - \tau) d\tau. \quad (112)$$

В соотношении (112) считается, что $t_1 \leq t_2$.

Последняя формула позволяет найти дисперсию процесса $\delta n(t)$, которую обозначим через $\Delta(t)$. В этом случае $t = t_1 = t_2$, поэтому

$$\Delta(t) = \langle \delta n^2(t) \rangle = \sigma \int_0^t K^2(t - \tau) d\tau. \quad (113)$$

Статистические характеристики флуктуаций потока массы частиц $q_m(t)$ задаются, очевидно, формулами, аналогичными (109) – (113), в которых ядро $K(t - \tau)$ заменено на ядро $Y(t - \tau)$.

Заметим, что интегрирование в полученных выше интегралах проводится фактически в пределах от нуля до $t - \delta t$, где δt – малый положительный параметр, равный по порядку величины времени свободного пробега частиц пара. Введение этого параметра физически обосновано тем, что не имеет смысла говорить о взаимодействии частиц для меньших времен, следовательно интервал $(t - \delta t; t)$ не оказывает влияния на статистические характеристики соответствующих случайных процессов. Отсутствие интегрирования на интервале $(t - \delta t; t)$ исключает рассмотрение области сингулярного поведения интегралов при $(t - \tau) \rightarrow 0$.

Найдем теперь одномерную функцию плотности вероятности $p(\delta n)$ флуктуаций $\delta n(t)$, используя найденное выражение для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda; t)$ (4.74). Согласно определению [1], запишем

$$p(\delta n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda; t) e^{-i\delta n \lambda} d\lambda, \quad (114)$$

то есть

$$p(\delta n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\Delta(t)\lambda^2} e^{-i\delta n \lambda} d\lambda. \quad (115)$$

Интегрируя последнее выражение, получим [12, с. 344]

$$p(\delta n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta(t)}} \exp\left(-\frac{\delta n^2}{2\Delta(t)}\right). \quad (116)$$

Таким образом, флуктуации $\delta n(t)$ подчиняются нормальному распределению Гаусса, зависящему от времени. Графики функции $p(\delta n)$ при различных t изображены на рис. 7. Видно, что с течением времени график плотности вероятности $p(\delta n)$ «размывается» по оси δn , а при малых значениях времени флуктуации величины $\delta n(t)$ сконцентрированы преимущественно в области малых значений δn , стремясь к δ -функции при $t \rightarrow \infty$.

Рис. 7. Графики функции $p(\delta n)$ при $t = 5 \cdot 10^{-6}$ с (кривая 1) и $t = 1$ с (кривая 2)

Воспользовавшись соотношением (102), найдем спектральную плотность флуктуаций величины $\delta n(t)$

$$G_{\delta n}(\omega) = \frac{\sigma}{m^2(D\omega + \beta\sqrt{2D\omega + \beta^2})}. \quad (117)$$

Из последней формулы видно, что при $\omega \rightarrow 0$ значение спектральной плотности $G_{\delta n}(\omega)$ стремится к постоянной величине

$$G_{\delta n}(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{\sigma}{m^2\beta^2} = \frac{\sigma}{m^2\left(\alpha + \frac{D}{R_0}\right)^2}. \quad (118)$$

Для спектральной плотности потока массы $G_{q_m}(\omega)$ получим выражение

$$G_{q_m}(\omega) = \frac{R_0^2 D\omega + R_0 D\sqrt{2D\omega + \beta^2} + D^2}{R_0^2(D\omega + \beta\sqrt{2D\omega + \beta^2})} \sigma. \quad (119)$$

Рис. 8. Графики спектральной плотности массового потока $G_{q_m}(\omega)$, соответствующие выражению (119), для воды (кривая 1) и этилового спирта (кривая 2)

Формула (119) показывает, что значение спектральной плотности $G_{q_m}(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ стремится к постоянной величине

$$G_{q_m}(\omega)\Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{D^2 \sigma}{R_0^2 \beta^2} = \frac{D^2 \sigma}{(R_0 \alpha + D)^2}, \quad (120)$$

а при $\omega \rightarrow \infty$ спектральная плотность массового потока $G_{q_m}(\omega)$ принимает значение мощности флуктуаций величины $\xi_{q_m}(t)$

$$G_{q_m}(\omega)\Big|_{\omega \rightarrow \infty} = \sigma. \quad (121)$$

Графики, соответствующие выражению (119), для воды и этилового спирта изображены на рис. 8.

Заметим, что статистические характеристики для величин $\delta n(t)$ и $q_m(t)$ в случае испарения с плоской поверхности жидкости в полупространство находятся из полученных выше выражений при $R_0 = \infty$.

7. Испарение микрокапли. Случай изменяющегося радиуса

Рассматриваемый до сих пор квазистационарный случай, при котором пренебрегалось изменением радиуса капли, очевидно, может быть использован лишь как первое приближение. Поток частиц через поверхность капли приводит к изменению массы капли и

ее радиуса. Особенно важно учитывать изменение радиуса в случае маленьких (субмикронного размера) капель, так как даже в течение небольшого промежутка времени их радиус может измениться значительно относительно первоначального. Ясно, что квазистационарное приближение в таком случае окажется неприменимым. Изменение радиуса капли необходимо учитывать при длительном наблюдении над ее поведением, даже в случае крупных (десятки и сотни микрон) капель аэрозоля. Наконец, при расчете времени «жизни» капли (до ее исчезновения в результате «схлопывания») учет изменения радиуса частицы, очевидно, необходим принципиально.

Однако решение задачи об испаряющейся капле жидкости при учете изменения ее радиуса осложняется ее математической сложностью (поставленная задача, как известно, относится к так называемому классу задач Стефана, аналитическое решение которых известно в очень ограниченном числе случаев [13]). В связи с этим получение статистических характеристик физических величин, описывающих поставленную задачу, может быть осуществлено только с использованием численных методов.

При проведении численного расчета использовались формулы, полученные для квазистационарного случая, при учете изменения радиуса капли. Изменение радиуса капли за время dt можно найти, зная массовый поток $q_m(t)$. В самом деле, за время dt масса капли M изменится на некоторую величину dM , определяемую равенством

$$dM = -q_m(t) \cdot 4\pi R^2(t) \cdot dt. \quad (122)$$

С другой стороны общую массу капли можно определить согласно выражению

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3(t), \quad (123)$$

где ρ – плотность жидкости. Находя производную $\frac{dM}{dt}$ из последней формулы и приравнявая ее той же производной из (4.87), получим

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{q_m(t)}{\rho}. \quad (124)$$

Полученная зависимость радиуса капли от текущего массового потока через ее поверхность использовалась на каждом шаге итерации при численном расчете.

При численном расчете количество шагов итерации было равным 30000, шаг по времени $\Delta t = 0,1$ с, масса молекул, составляющих каплю, $m = 10^{-22}$ кг, коэффициент диффузии $D = 2 \cdot 10^{-5}$ м²/с, начальный радиус частицы $R_0 = 50$ мкм, плотность жидкости $\rho = 1000$ кг/м³, концентрация насыщенного пара $n_0 = 10^{23}$ м⁻³.

Численный расчет осложнялся тем обстоятельством, что использование реального значения массы отдельной молекулы жидкости приводило к необходимости очень большого количества шагов итерации для достижения момента «схлопывания» капли, что, в свою очередь требовало большого количества машинного времени. В связи с этим при численных расчетах масса молекулы была завышена, что формально соответствует уменьшению числа молекул, составляющих каплю, а значит более быстрому ее испарению. Это позволило значительно сократить необходимое количество машинного времени и, следовательно, получить такое количество независимых реализаций, которое позволяет говорить об удовлетворительной статистической достоверности полученных результатов.

Следует отметить, что завышение массы отдельной молекулы не приводит к принципиальному изменению характера статистических характеристик рассматриваемого процесса диффузии и позволяет проследить основные особенности модели испарения капли жидкости при учете флуктуаций потока частиц через ее поверхность.

При численном расчете был выбран также относительно большой шаг итерации по времени, что требовалось необходимостью устойчивости расчета при росте шага итерации. Однако, и в этом случае статистические характеристики рассматриваемой модели не претерпевают принципиальных изменений. В частности, они сохраняют свой вид при кратном изменении шага по времени.

Рис. 9. Характерный вид изменения радиуса капли R с течением времени

Рис. 10. Характерный вид массового потока $q_m(t)$ в зависимости от времени

Рис. 11. График спектральной плотности флуктуаций массового потока $G_{q_m}(\omega)$

На рис. 9 показан характерный график зависимости радиуса частицы от шага итерации k , а на рис. 10 изображен соответствующий график массового потока для этого случая. График на рис. 11 показывает спектральную плотность массового потока $G_{q_m}(\omega)$, изображенного на рис. 10. Найденное уравнение кривой аппроксимации для построенного графика, подчиняющееся степенному закону, имеет вид

$$G_{q_m}(\omega) = 10^{-7} \omega^{-1,03}. \quad (125)$$

Это указывает на то, что флуктуации массового потока представляют собой фликкер-шум, для которого характерна обратно пропорциональная зависимость спектральной плотности от частоты.

По результатам 3000 независимых реализаций были найдены те моменты итерационного процесса, при которых происходит исчезновение капли. На рис. 12 показан график распределения количества частиц $N_v(k)$, исчезнувших в k -ый шаг итерации. Видно,

что показанный график относительно близок к графику, характерному для пуассоновского процесса.

Рис. 12. График распределения количества частиц $N_v(k)$, исчезнувших на k -ом шаге итерации

Полученные результаты могут иметь существенное значение при исследовании капельных аэрозолей, находящихся в атмосфере. Рассмотренная модель, учитывающая флуктуации массового потока через границу раздела жидкой и газообразной сред, может быть использована при метеорологических исследованиях, например, при прогнозировании времени исчезновения тумана; при экологическом мониторинге загрязнения городов и промышленных территорий объектами, находящимися в состоянии аэрозоля; при исследовании химических взаимодействий веществ, одно из которых находится в аэрозольном состоянии и др.

8. Теплопроводность вокруг сферической микрочастицы

Рассмотрим неподвижную сферическую частицу радиуса R , температуропроводности χ_m и объемной теплоемкости c_v , в центр которой поместим начало сферической системы координат (рис. 4, в котором теперь вместо концентрации следует брать температуру).

Температуру поверхности частицы будем считать некоторой функцией времени $T_R(t)$. Среду вне сферической частицы (при $r > R$) считаем однородной с постоянными параметрами: плотностью ρ , теплопроводностью κ и температуропроводностью χ , причем $\chi \ll \chi_m$. Начальная температура во всем пространстве равна некоторой постоянной

величине T_0 . Изменением радиуса сферической частицы вследствие изменения температуры пренебрегаем.

Ясно, что в рассматриваемом случае температура среды будет зависеть только от расстояния до центра сферы r и времени t . Уравнение теплопроводности тогда примет вид

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{\chi}{r} \frac{\partial^2 (rT(r,t))}{\partial r^2} \quad (r > R) \quad (126)$$

с соответствующими граничным и начальным условиями

$$T(r,t)|_{r=R} = T_R(t), \quad T(r,t)|_{t=0} = T_0. \quad (127)$$

Для потока тепла $q_T(t)$ через поверхность сферической оболочки радиуса R справедливо общее соотношение

$$q_T(t) = -\kappa \left. \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (128)$$

С другой стороны, тот же тепловой поток $q_T(t)$ при учете его флуктуаций через поверхность оболочки радиуса R может быть определен с помощью выражения

$$q_T(t) = -\frac{c_V R}{3} \frac{dT_R(t)}{dt} + \xi_{q_T}(t), \quad (129)$$

где $\xi_{q_T}(t)$ – случайный тепловой поток (источник Ланжевена), свойства которого зависят от характера источника флуктуаций, причем $\langle \xi_{q_T}(t) \rangle = 0$. Отметим, что соотношение (129) справедливо для случая предполагаемой нами высокой тепловой проводимости частицы.

Во многих случаях можно считать, что поток $\xi_{q_T}(t)$ представляет собой белый шум с интенсивностью ν . Граничную частоту ω_{ep} такого шума можно оценить с помощью характеризующих задачу параметров: радиуса частицы R и коэффициента температуропроводности материала частицы χ_m , согласно выражению

$$\omega_{ep} = \frac{\chi_m}{R^2}. \quad (130)$$

В частности, для медной частицы с коэффициентом температуропроводности $\chi_m = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ и радиусом 10 мкм для величины ω_{ep} получим значение порядка 10^6 с^{-1} .

Величину интенсивности ν случайного теплового потока можно оценить по формуле

$$\nu = \frac{\kappa}{R^3} k_B T^2, \quad (131)$$

где k_B – постоянная Больцмана. Для рассматриваемой выше частицы, помещенной в воду, получим оценку $\nu = 10^{-3} \text{ Дж}^2/\text{м}^4\text{с}$.

Решение поставленной задачи (126) – (127) будем искать аналогично задаче (79) – (81) с помощью введения вспомогательной функции $f(r, t)$, определяемой выражением

$$f(r, t) = rT(r, t). \quad (132)$$

Решение такого рода задач представляет собой, как известно [4], сумму двух слагаемых. Первое слагаемое связано с наличием первоначального распределения температуры (и не зависит от соответствующих изменений температуры на границах), второе – обязано присутствием граничных функций температур или потоков. Из физических соображений ясно, что в рассматриваемой задаче, из-за наличия термодинамического равновесия в начальный момент времени, неслучайная составляющая потока тепла через границу среды, вызванная начальным распределением температуры, будет иметь нулевое значение. Тогда решение задачи (126) – (127) запишем с помощью выражения

$$f(r, t) = \frac{R}{2\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \frac{r-R}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(r-R)^2}{4\chi(t-\tau)}\right] T_R(\tau) d\tau. \quad (133)$$

Для получения уравнения, определяющего величину теплового потока $q_T(t)$, воспользуемся соотношением, следующим из (128) и (129),

$$\left. \frac{\partial f(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{R}{\kappa} q_T(t) + T_R(t). \quad (134)$$

Определив производную $\frac{\partial f(r, t)}{\partial r}$ из формулы (133), получим

$$\frac{\partial f(r, t)}{\partial r} = \frac{R}{2\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \left[\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} - \frac{2(r-R)^2}{4\chi(t-\tau)^{5/2}} \right] \exp\left[-\frac{(r-R)^2}{4\chi(t-\tau)}\right] T_R(\tau) d\tau. \quad (135)$$

Интегрирование по частям позволяет записать последнее выражение в виде

$$\frac{\partial f(r, t)}{\partial r} = -\frac{R}{\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(r-R)^2}{4\chi(t-\tau)}\right] \frac{dT_R(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (136)$$

Нахождение из формулы (136) величины $\left. \frac{\partial f(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R}$ и ее подстановка в (134)

приводит к следующему соотношению для теплового потока $q_T(t)$

$$q_T(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{\sqrt{\pi\chi}}{R} \right) \frac{dT_R(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (137)$$

Введя замены

$$Z(t) = \frac{dT_R(t)}{dt}, \quad \tilde{\xi}_{q_T} = \frac{3}{c_V R} \xi_{q_T} \quad (138)$$

и воспользовавшись выражением (129), получим искомое соотношение, связывающее случайный тепловой поток $\xi_{q_T}(t)$ через границу сферической оболочки и производную температуры $T_R(t)$ на поверхности по времени, имеющее вид интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$Z(t) + \frac{3\kappa}{c_v R \sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{\sqrt{\pi\chi}}{R} \right) Z(\tau) d\tau = \tilde{\xi}_{q_T}(t). \quad (139)$$

Полученное уравнение (139), ядро которого представляет собой сумму слагаемого абелевого типа и постоянной величины, не может быть сведено к конечной системе стохастических дифференциальных уравнений. Таким образом, случайные процессы $Z(t)$ и $q_T(t)$, а также флуктуации температуры $T_R(t)$, представляющей собой интеграл по времени от функции $Z(t)$, являются немарковскими [2].

Заметим также, что соотношение (139) справедливо при описании одномерного процесса теплопроводности в полупространстве над поверхностью плоского слоя конечной толщины. Действительно, рассмотрим сферическую оболочку радиуса R и толщины h , такой, что $h \ll R$. Теплоемкость C такой оболочки определяется равенством $C = c_v \cdot 4\pi R^2 h$. Вводя величину $c_s = \frac{C}{4\pi R^2} = c_v h$, представляющую собой теплоемкость оболочки, отнесенную к единице площади ее поверхности, для теплового потока получим равенство $q_T(t) = -\frac{c_v \cdot 4\pi R^2 h}{4\pi R^2} \frac{dT_R(t)}{dt} + \xi_{q_T}(t) = -c_s \frac{dT_R(t)}{dt} + \xi_{q_T}(t)$. Тогда для интегрального стохастического уравнения, описывающего процесс распространения тепла в среде, ограниченной бесконечным плоским слоем, вместо соотношения (139) получим выражение

$$Z(t) + \frac{\kappa}{c_s \sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} Z(\tau) d\tau = \tilde{\xi}_{q_T}(t). \quad (140)$$

Общий вид решения (139) можно представить с помощью интегрального оператора

$$Z(t) = \tilde{\xi}_{q_T}(t) + \int_0^t K(t-\tau) \tilde{\xi}_{q_T}(\tau) d\tau, \quad (141)$$

где $K(t-\tau)$ – резольвента для уравнения (139), которая может быть записана с помощью бесконечного ряда [14]

$$K(t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t-\tau), \quad (142)$$

в котором

$$u_{n+1}(t-\tau) = - \int_{\tau}^t u_1(t-s) u_n(s-\tau) ds, \quad (143)$$

$$u_1(t-\tau) = \frac{3\kappa}{c_V R \sqrt{\pi\chi}} \left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{\sqrt{\pi\chi}}{R} \right). \quad (144)$$

Рис. 13. Схематический график функции $K(t-\tau)$

Расчет по формуле (143) показывает, что для реальных сред в случае не слишком больших значений $t-\tau$ ряд (142) с хорошей степенью точности может быть определен с помощью суммы первых его членов. На рис. 13 изображен схематический график функции $K(t-\tau)$, в случае, если сохранены первые 10 слагаемых (для простоты все постоянные приняты за единицу). Хорошо видно, что построенный график представляет собой убывающую кривую. Аппроксимируя его степенной функцией, получим в хорошем приближении зависимость

$$K(t-\tau) = 0,61(t-\tau)^{-0,57}. \quad (145)$$

В частном случае теплопроводности над плоскостью (при $R = \infty$) ряд (142) принимает вид

$$K(t-\tau) = \frac{1}{t-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n (t-\tau)^{n/2}, \quad (146)$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{3\kappa}{c_V R \sqrt{\chi}} \right)^n. \quad (147)$$

В последнем выражении $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Для одномерной $g_1(\lambda; t)$ и многомерной $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ характеристических функций случайного процесса $Z(t)$ получим соотношения

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{9\nu\lambda^2}{2c_v^2 R^2} \int_0^t K^2(t-\tau) d\tau \right], \quad (148)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{9\nu}{c_v^2 R^2} \sum_{\substack{l,k=1, \\ k \leq l}}^L \lambda_l \lambda_k \int_0^{t_k} K(t_l - \tau) K(t_k - \tau) d\tau \right]. \quad (149)$$

Следует сделать следующее замечание. В полученных выражениях предел интегрирования по времени ограничен фактически не значением t , а величиной $t - \delta t$, где δt – малый параметр, близкий к времени свободного пробега частиц среды. Это вызвано отсутствием физического влияния на флуктуации рассматриваемых величин тех процессов, которые происходят при $t - \tau < \delta t$.

Найденные формулы (148) и (149) позволяют определить моменты любого порядка для процесса $Z(t)$. Для математического ожидания $\langle Z(t) \rangle$, момента второго порядка $\langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle$ и дисперсии $\sigma^2(t) = \langle Z^2(t) \rangle$, получим

$$\langle Z(t) \rangle = \left. \frac{\partial g_1(\lambda; t)}{i\partial\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0, \quad (150)$$

$$\langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle = \left. \frac{\partial^2 g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)}{i\partial\lambda_1 i\partial\lambda_2} \right|_{\substack{\lambda_1=0, \\ \lambda_2=0}} = \frac{9\nu}{c_v^2 R^2} \int_0^{t_1} K(t_2 - \tau) K(t_1 - \tau) d\tau, \quad (151)$$

$$\sigma^2(t) = \langle Z^2(t) \rangle = \langle Z(t)Z(t) \rangle = \frac{9\nu}{c_v^2 R^2} \int_0^t K^2(t - \tau) d\tau. \quad (152)$$

Уравнение (148) позволяет найти также одномерную плотность вероятности $p(Z)$ флуктуаций величины $Z(t)$ с помощью определения

$$p(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda; t) e^{-i\lambda Z} d\lambda. \quad (153)$$

Получим

$$p(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left(-\frac{Z^2}{2\sigma^2(t)} \right), \quad (154)$$

что соответствует нормальному распределению Гаусса. Из выражения (152) видно, что дисперсия величины $Z(t)$ растет с течением времени, из чего следует «размывание» плотности вероятности $p(Z)$ при увеличении t .

Найдем теперь спектральные плотности флуктуаций величины $Z(t)$, температуры поверхности $T_R(t)$ и теплового потока $q_T(t)$. Для этого проведем преобразование Лапласа исходного интегрального уравнения (139). В результате имеем

$$\hat{Z}(p) + \frac{3\kappa}{c_v R \sqrt{\chi}} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{\chi}}{Rp} \right) \hat{Z}(p) = \hat{\xi}_{q_T}(p), \quad (155)$$

где символами со «шляпкой» обозначены образы соответствующих функций, p – фурье-образ переменной t .

С помощью определения спектральной плотности установившегося случайного процесса (при $t = \infty$), а также при учете того факта, что спектральная плотность белого шума равна его интенсивности, для спектральной плотности флуктуаций $Z(t)$ получим

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega^2}{\frac{c_v^2 R^2 \omega^2}{9} + \frac{\sqrt{2\kappa} c_v R}{3\sqrt{\chi}} \omega^{3/2} + \frac{\kappa^2}{\chi} \omega + \frac{\sqrt{2\kappa}}{R\sqrt{\chi}} \omega^{1/2} + \frac{\kappa^2}{R^2}} \nu. \quad (156)$$

Из выражения (156) находим спектральные плотности флуктуаций $T_R(t)$ и $q_T(t)$:

$$G_{T_R}(\omega) = \frac{1}{\frac{c_v^2 R^2 \omega^2}{9} + \frac{\sqrt{2\kappa} c_v R}{3\sqrt{\chi}} \omega^{3/2} + \frac{\kappa^2}{\chi} \omega + \frac{\sqrt{2\kappa}}{R\sqrt{\chi}} \omega^{1/2} + \frac{\kappa^2}{R^2}} \nu, \quad (157)$$

$$G_{q_T}(\omega) = \left(1 + \frac{\frac{c_v^2 R^2 \omega^2}{9} + \frac{\sqrt{2\kappa} c_v R}{3\sqrt{\chi}} \omega^{3/2}}{\frac{\kappa^2}{\chi} \omega + \frac{\sqrt{2\kappa}}{R\sqrt{\chi}} \omega^{1/2} + \frac{\kappa^2}{R^2}} \right)^{-1} \nu. \quad (158)$$

Рис. 14. Графики спектральной плотности флуктуаций температуры поверхности медной частицы $G_{T_R}(\omega)$ при $R = 10 \text{ мкм}$ (кривая 1), $R = 12,5 \text{ мкм}$ (2), $R = 15 \text{ мкм}$ (3)

Графики на рис. 14 и 15 иллюстрируют найденные зависимости (157) и (158) для различных значений радиуса R . При построении графиков параметр ν рассчитывался согласно выражению (131). Из рис. 14 хорошо видно, что с увеличением радиуса R графики спектральной плотности $G_{T_R}(\omega)$ флуктуаций температуры $T_R(t)$ располагаются ниже аналогичных графиков, соответствующих меньшим по размеру частицам. Последнее означает уменьшение дисперсии флуктуаций температуры сферической частицы с ростом ее радиуса. Спектральная плотность $G_{T_R}(\omega)$ в области низких частот оказывается обратно пропорциональной радиусу.

Рис. 15. Графики спектральной плотности флуктуаций теплового потока через поверхность медной частицы $G_{q_T}(\omega)$ при $R = 10 \text{ мкм}$ (1), $R = 12,5 \text{ мкм}$ (2), $R = 15 \text{ мкм}$ (3)

Полученные результаты показывают, что флуктуации температуры поверхностей реальных микрочастиц являются в общем случае немарковскими случайными процессами. Они могут найти применение при описании случайных флуктуаций температуры микрочастиц в средах с малой теплопроводностью.

9. Теплопроводность вокруг микронитей

Рассмотрим бесконечно протяженное цилиндрическое тело малого радиуса R , изготовленное из хорошо проводящего материала с объемной теплоемкостью C_v и температуропроводностью χ_c , находящееся в неограниченной теплопроводящей среде с теплопроводностью K и температуропроводностью χ (рис. 16). Будем считать, что

температура поверхности цилиндра в данный момент времени всюду одинакова и является некоторой функцией времени: $T(R,t) = T_R(t)$. Заметим, что в случае реальных сред такое условие соответствует цилиндрическим телам не очень большого радиуса R при рассмотрении явления теплопроводности на расстояниях, меньших или порядка R от поверхности цилиндра. Будем также считать, что в начальный момент времени температура во всем пространстве, включая температуру материала цилиндра, была одинакова и равна нулю [19].

В рамках сделанных предположений температура среды вне цилиндра зависит только от расстояния до его оси симметрии и подчиняется дифференциальному уравнению теплопроводности вида

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right). \quad (159)$$

Рис. 16. Теплопроводность в пространстве, окружающем цилиндрическую поверхность

Начальные и граничные условия задаются соответственно выражениями

$$T(r,t)|_{t=0} = 0, \quad (160)$$

$$T(r,t)|_{r=R} = T_R(t). \quad (161)$$

Тепловой поток через поверхность цилиндрического тела $q_T(t)$ определяется, как и ранее, общим соотношением

$$q_T(t) = -\kappa \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=R} + \xi_{q_T}(t), \quad (162)$$

где функция $\xi_{q_T}(t)$ представляет собой случайный тепловой поток, обусловленный указанными ранее причинами, статистические свойства которого определяются характером источника флуктуаций, причем среднее значение $\langle \xi_{q_T}(t) \rangle = 0$. С другой стороны, такой поток в случае тела цилиндрической формы может быть определен также согласно уравнению

$$q_T(t) = -\frac{C_V R}{2} \frac{dT_R(t)}{dt}. \quad (163)$$

Следует подчеркнуть, что выражение (163) справедливо для случая предполагаемого нами наличия высокой тепловой проводимости материала цилиндра по сравнению с проводимостью среды, то есть при условии $\chi \ll \chi_c$.

Функция $\xi_{q_T}(t)$, как и ранее, во многих случаях может быть представлена в виде белого шума с интенсивностью ν , ограниченного сверху некоторой предельной частотой $\omega_{\max}$, которую с точностью до постоянной можно оценить с помощью формулы

$$\omega_{\max} = \frac{\chi_c}{R^2}. \quad (164)$$

Для оценки величины $\omega_{\max}$ будем считать цилиндр изготовленным из меди (для которой коэффициент температуропроводности $\chi_c = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$) и имеющим радиус $R = 10 \text{ мкм}$. Получим, что $\omega_{\max} = 10^6 \text{ с}^{-1}$. Таким образом, белый шум, характерный для флуктуаций теплового потока через цилиндрическую поверхность, оказывается широкополосным по спектру.

Оценку величины интенсивности ν можно произвести по формуле

$$\nu = \frac{\kappa}{R^3} k_B T^2. \quad (165)$$

При температуре $T_0 = 300 \text{ К}$ для медного цилиндрического тела радиусом $R = 50 \text{ нм}$, помещенного в воду, оценка, даваемая выражением (165), приводит к величине интенсивности $\nu = 10^4 \text{ Дж}^2/(\text{м}^4 \cdot \text{с})$.

Можно показать, что если в некоторый момент времени τ на каждой единице длины рассматриваемой цилиндрической поверхности мгновенно выделилось тепло $Q(\tau)$, то температура среды при $r > R$ в момент времени t определится выражением [11]

$$T(r, t) = \frac{\chi}{\kappa} Q(\tau) G(r, R, t - \tau), \quad (166)$$

где $G(r, R, t - \tau)$ – функция влияния мгновенного цилиндрического источника тепла (функция Грина), определяемая согласно

$$G(r, R, t - \tau) = \frac{1}{4\pi\chi(t - \tau)} \exp\left(-\frac{r^2 + R^2}{4\chi(t - \tau)}\right) I_0\left(\frac{Rr}{2\chi(t - \tau)}\right), \quad (167)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Отметим, что $Q(\tau)\delta(t-\tau) = 2\pi R q_T(t)$. Тогда в случае произвольного теплового потока через поверхность цилиндра $q_T(t)$, температура на расстоянии r от оси симметрии цилиндра будет определяться с помощью интеграла

$$T(r, t) = \frac{R}{2\kappa} \int_0^t \frac{q_T(\tau)}{t-\tau} \exp\left(-\frac{r^2 + R^2}{4\chi(t-\tau)}\right) I_0\left(\frac{Rr}{2\chi(t-\tau)}\right) d\tau. \quad (168)$$

Найдем производную $\frac{\partial T(r, t)}{\partial r}$, воспользовавшись выражением (168) и тем фактом, что $\frac{\partial I_0(z)}{\partial z} = I_1(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} = \\ = \frac{R}{4\chi\kappa} \int_0^t \frac{q_T(\tau)}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{r^2 + R^2}{4\chi(t-\tau)}\right) \left[R I_1\left(\frac{Rr}{2\chi(t-\tau)}\right) - r I_0\left(\frac{Rr}{2\chi(t-\tau)}\right) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (169)$$

Из полученного соотношения (169), при учете формул (162) и (163), находим

$$\frac{C_V R}{2} \int_0^t K(t-\tau) Z(\tau) d\tau = \xi_{q_T}(t), \quad (170)$$

где введены обозначения для скорости изменения температуры поверхности цилиндра

$$Z(t) = \frac{dT_R(t)}{dt} \quad (171)$$

и ядра интегрального уравнения (170)

$$\begin{aligned} K(t-\tau) = \\ \delta(t-\tau) + \frac{R^2}{4\chi(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2\chi(t-\tau)}\right) \left[I_1\left(\frac{R^2}{2\chi(t-\tau)}\right) - I_0\left(\frac{R^2}{2\chi(t-\tau)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (172)$$

Таким образом, процесс распространения тепла в пространстве, окружающем цилиндрическую поверхность малого радиуса R , при наличии случайного теплового потока через нее, описывается стохастическим интегральным уравнением Вольтерра второго рода (170), что означает немарковский характер флуктуаций величины $Z(t)$, а, следовательно, и флуктуаций температуры поверхности цилиндра $T_R(t)$ и потока $q_T(t)$.

Заметим, что при больших значениях радиуса R выражение (172) может быть записано с помощью приближенной формулы [15]

$$K(t-\tau) = \delta(t-\tau) + \frac{\sqrt{\chi}}{R\sqrt{\pi(t-\tau)}}, \quad (173)$$

при подстановке которой в уравнение (5.59) вместо получим интегральное уравнение вида

$$\frac{C_v R}{2} Z(t) + \frac{\kappa}{\sqrt{\pi \chi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} Z(\tau) d\tau = \xi_{q_r}(t), \quad (174)$$

описывающее явление теплопроводности в полупространстве над плоской поверхностью.

Отметим также на уже отмечающийся ранее факт, заключающийся в том, что для случая, когда основным источником теплопроводности является теплоперенос, то верхний предел интегрирования в уравнении (170) следует, вообще говоря, брать равным $t - \delta t$, где δt – малый параметр, по порядку величины равный времени свободного движения частиц теплопроводящей среды.

Рассмотрим теплопроводность в среде, окружающей цилиндрическую оболочку, в случае, когда параметр $\frac{R^2}{\chi} \ll 1$, что, как видно из выражения (164), соответствует случаю очень большой граничной частоты спектра флуктуаций теплового потока через цилиндрическую поверхность (белый шум). Положив также $t - \tau > \delta t$, после разложения модифицированных функций Бесселя и экспоненты в ряд и удержания первых слагаемых разложения, получим

$$Z(t) - \frac{R^2}{4\chi} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2} Z(\tau) d\tau = \frac{2}{C_v R} \xi_{q_r}(t). \quad (175)$$

Решение полученного интегрального уравнения Вольтерра второго рода (175) в общем случае можно записать в виде [14]

$$Z(t) = \frac{2}{C_v R} \int_0^t [\delta(t-\tau) + F(t-\tau)] \xi_{q_r}(\tau) d\tau, \quad (176)$$

где резольвента $F(t-\tau)$ определяется рекуррентным соотношением

$$F(t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t-\tau). \quad (177)$$

Здесь

$$F_1(t-\tau) = \frac{R^2}{4\chi} \frac{1}{(t-\tau)^2}, \quad (178)$$

$$F_n(t-\tau) = \int_{\tau+\delta t}^{t-\delta t} F_1(t-s) F_{n-1}(s-\tau) ds, \quad n > 1. \quad (179)$$

Указанное выше условие $\frac{R^2}{\chi} \ll 1$ делает ряд (177) быстро сходящимся. При условии

$\frac{R^2}{\chi} \ll \delta t$ (цилиндрические поверхности малого радиуса, или тонкие нити), вторым и

последующими слагаемыми ряда (177) можно пренебречь по сравнению с первым, и окончательно получим

$$F(t-\tau) = \frac{R^2}{4\chi} \frac{1}{(t-\tau)^2}. \quad (180)$$

Исходное интегральное уравнение (176) для случая резольвенты $F(t-\tau)$ вида (180) позволяет найти любые статистические характеристики процесса $Z(t)$. Так, для одномерной $g_1(\lambda; t)$ и многомерных $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ характеристических функций процесса $Z(t)$ при условии, что случайный тепловой поток $\xi_{q_T}(t)$ представляет собой белый шум интенсивности ν , получим

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{1}{24} \frac{R^2 \nu \lambda^2}{\chi^2 C_V^2} \left(\frac{1}{\delta t^3} - \frac{1}{t^3} \right) \right], \quad (181)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{1}{24} \frac{R^2 \nu}{\chi^2 C_V^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^L \frac{\lambda_k \lambda_l}{(t_l - t_k)^2} \left[\frac{1}{\delta t} + \frac{t_k^2 - t_l^2 + t_l t_k}{t_l t_k (t_l - t_k)} + \frac{2}{t_l - t_k} \ln \frac{t_l \delta t}{t_k (t_l - t_k)} \right] \right]. \quad (182)$$

Графики функций $g_1(\lambda; t)$, задаваемых соотношением (181), изображены на рис. 17 для различных значений t . Здесь и в дальнейшем в качестве примеров использованы медные цилиндрические микротела малого радиуса, помещенные в воду ($R = 10^{-8}$ м, $\nu = 10^4$ Дж²/(м⁴·с), $\chi = 2 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $C_V = 1,3 \cdot 10^3$ Дж/(К·м³)).

Рис. 17. Графики функций $g_1(\lambda; t)$ для значений $t = 10^{-7}$ с (кривая 1), $t = 10^{-6}$ с (кривая 2), $t = \infty$ (кривая 3)

Выражения для характеристических функций, определяемых уравнениями (181) и (182), позволяют найти любые статистические характеристики процесса $Z(t)$. Для математического ожидания $\langle Z(t) \rangle$ и дисперсии $D_Z(t)$ процесса $Z(t)$ из (181) получим

$$\langle Z(t) \rangle = \frac{\partial g_1(\lambda; t)}{i \partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0, \quad (183)$$

$$D_Z(t) = \langle Z^2(t) \rangle = -\frac{\partial^2 g_1(\lambda; t)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=0} = \frac{R^2 \nu}{24 \chi^2 C_V^2} \left(\frac{1}{\delta t^3} - \frac{1}{t^3} \right). \quad (184)$$

Из найденной формулы (184) видно, что установившийся процесс теплопроводности (при $t \rightarrow \infty$) сопровождается постоянным значением дисперсии $D_Z(t)$ скорости изменения температуры цилиндрической поверхности $Z(t)$:

$$D_Z(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{R^2 \nu}{24 \chi^2 C_V^2 \delta t^3}. \quad (185)$$

Для корреляционной функции $K(t_1, t_2) = \langle Z(t_1) Z(t_2) \rangle$ при помощи двумерной характеристической функции $g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)$, определяемой из (182), получим

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= -\frac{\partial^2 g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \Big|_{\substack{\lambda_1=0, \\ \lambda_2=0}} = \\ &= \frac{1}{48} \frac{R^2 \nu}{\chi^2 C_V^2} \frac{1}{(t_2 - t_1)^2} \left[\frac{1}{\delta t} + \frac{t_1^2 - t_2^2 + t_1 t_2}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)} + \frac{2}{t_2 - t_1} \ln \frac{t_2 \delta t}{t_1 (t_2 - t_1)} \right]. \end{aligned} \quad (186)$$

Из зависимости (186) следует, что при $t_1 \rightarrow \infty$, $t_2 \rightarrow \infty$ (установившийся процесс теплопроводности), корреляционная функция $K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K(\tau)$, принимает вид

$$K(\tau) = \frac{1}{48} \frac{R^2 \nu}{\chi^2 C_V^2} \frac{1}{\tau^2} \left[\frac{1}{\delta t} + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\tau} \ln \frac{\delta t}{\tau} \right]. \quad (187)$$

Графики функций $K(t - \tau, t)$, задаваемых соотношением (186), изображены на рис. 18 для различных значений параметра t .

Найденная корреляционная функция (186) позволяет найти одностороннюю спектральную плотность процесса $Z(t)$

$$G_Z(\omega, t) = 2 \int_0^t K(t - \tau, t) \cos \omega \tau d\tau. \quad (188)$$

На рис. 19 проиллюстрирован результат численного вычисления односторонней спектральной плотности $G_Z(\omega, t)$ с помощью формулы (188) для различных значений

времени t . В частном случае малых значений ω и не очень больших t из (186) и (188) при учете условия $\delta t \ll t$ получим

$$G_Z(\omega, t)|_{\omega \rightarrow 0} = 2 \int_0^t K(t-\tau, t) \left(1 - \frac{\omega^2 \tau^2}{2} \right) d\tau = \frac{1}{48} \frac{R^2 \nu}{\chi^2 C_V^2} \frac{t}{\delta t} \left(\frac{4}{t \delta t} - \omega^2 \right). \quad (189)$$

Рис. 18. Графики функций $K(t-\tau, t)$ для значений $t = 10^{-7} \text{ c}$ (кривая 1), $t = 10^{-6} \text{ c}$ (кривая 2), $t = 1 \text{ c}$ (кривая 3)

Рис. 19. Графики односторонней спектральной плотности $G_Z(\omega, t)$ для значений времени $t = 0,01 \text{ c}$ (кривая 1) и $t = 1 \text{ c}$ (кривая 2)

Для одномерной функции плотности вероятности $p(Z; t)$ согласно определению найдем выражение

$$\begin{aligned} p(Z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda; t) \exp(-i\lambda Z) d\lambda = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi D(t)}} \exp\left(-\frac{Z^2}{2D(t)}\right). \end{aligned} \quad (190)$$

График на рис. 20 изображает зависимость (190) для различных t . Хорошо видно, что с течением времени график плотности вероятности флуктуаций величины $Z(t)$ «размазывается» вдоль оси Z , стремясь к стационарной гауссовой кривой при $t \rightarrow \infty$.

Рис. 20. Зависимость плотности вероятности $p(Z, t)$ для $t = 10^{-7} \text{ c}$ (кривая 1) и $t = 10^{-6} \text{ c}$ (кривая 2)

Таким образом, рассмотрение процесса распространения тепла даже в случае относительно простых моделей (бесконечный цилиндр постоянного радиуса, флуктуации теплового потока через поверхность которого не зависят от точки на его поверхности, а ранее – бесконечная плоская поверхность и поверхность сферической частицы) требует для статистического описания изменений соответствующих физических величин применения интегральных стохастических уравнений, а сами флуктуации величин следует рассматривать как немарковские случайные процессы. Полученные результаты имеют значение при описании случайных флуктуаций температуры цилиндрических и сферических тел микрометрового и субмикрометрового радиуса в средах с малой теплопроводностью.

10. Заключение

Проведенное описание движения микрочастицы в вязкой среде, а также явлений теплопроводности в средах с микронаноструктурой, как случайных процессов, носящих немарковский характер, показывает их значительное отличие от аналогичных процессов, исследуемых классическими методами. Результаты работы представляют большое значение

при изготовлении материалов с микроструктурой, имеющих заданные свойства, при использовании особенностей диффузии и теплопроводности в качестве индикаторов характеристик среды с наночастицами, исследовании физических свойств полимеров и получении эластомеров с необходимыми качествами и в других случаях.

Список литературы

1. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. - М.: Наука, 1990. – 632 с.
2. Морозов А.Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997. – 332 с.
3. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. Новое в исследованиях $1/f$ -шума // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141., вып. 1. – С. 151 – 176.
4. Букингем М. Шумы в электронных приборах и системах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 399 с.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 528 с.
6. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. – М.:Наука, 1982. – 608 с.
7. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 528 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1986. – 736 с.
9. Bagayev S. N., Orlov V. A., Panov S. V. The Law of Motion of Brownian Particles at Short Observation Times // Laser Physics. 2001. Vol. 11. No. 11. P. 1232–1234.
10. Lucic B., Jeney S., Tischer C. et al. Direct observation of nondiffusive motion of a Brownian particle // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 160601-1–160601-4.
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.:Наука, 1981. – 800 с.
13. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. – Рига: Звайгзне, 1967. – 458 с.
14. Волterra В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
15. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.:Наука, 1984. – 344 с.
16. Морозов А.Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997. – 332 с.

17. Morozov A.N., Skripkin A.V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process // *Physics Letters A*. 2011. V. 375. P. 4113 – 4115.
18. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Описание испарения сферической частицы жидкости как немарковского случайного процесса с использованием интегральных стохастических уравнений // *Известия вузов. Физика*. 2010. №11. С. 55 – 64.
19. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Распространение тепла в пространстве вокруг цилиндрической поверхности как немарковский случайный процесс // *Инженерно-физический журнал*. 2011. Т. 84. №6. С. 1121 – 1127.
20. Морозов А.Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // *Вестник МГТУ, Естественные науки*. 2004. №3. – С. 47 – 56.

Kinetic phenomena in media with microstructure as non-Markov processes

05, May 2012

DOI: [10.7463/0512.0366037](https://doi.org/10.7463/0512.0366037)

Skripkin A.V.

Russia, Bauman Moscow State Technical University
skripkin@bmstu.ru

The article presents a review of investigation of kinetic processes such as diffusion and thermal conduction in media with microstructure, near to the particles of micron and nanometer size, as well as microfilaments. The flow features of kinetic processes on small spatial and temporal scales are described. It was shown that these processes belong to the class of non-Markov processes and require the use of integral transformations for their description.

Publications with keywords: [diffusion](#), [thermal conductivity](#), [medium with microstructure](#), [non-Markov process](#)

Publications with words: [diffusion](#), [thermal conductivity](#), [medium with microstructure](#), [non-Markov process](#)

References

1. Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. *Stokhasticheskie differentsial'nye sistemy* [Stochastic differential systems]. Moscow, Nauka, 1990. 632 p.
2. Morozov A.N. *Neobratimye protsessy i brounovskoe dvizhenie* [Irreversible processes and Brownian motion]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1997. 332 p.
3. Bochkov G.N., Kuzovlev Iu.E. Novoe v issledovaniakh 1/f-shuma [New in research of 1/f-noise]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 1983, vol. 141, no. 1, pp. 151 – 176.
4. Buckingham M.J. *Noise in Electronic Devices and Systems*. Ellis Horwood (John Wiley), Chichester, 1983. 372 p. (Russ. ed.: Bukiŋgem M. *Shumy v elektronnykh priborakh i sistemakh*. Moscow, Mir, 1986. 399 p.).
5. Feller W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 1. 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1968. 509 p. (Russ. ed.: Feller V. *Vvedenie v teoriyu veroiatnostei i ee prilozheniia*. V. 1. Moscow, Mir, 1984. 528 p.).
6. Klimontovich Iu.L. *Statisticheskaya fizika* [Statistical physics]. Moscow, Nauka, 1982. 608 p.

7. Gardiner C. W. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. 2d ed. Springer-Verlag, 1985. 442 p. (Russ. ed.: Gardiner K.V. *Stokhasticheskie metody v estestvennykh naukakh*. Moscow, Mir, 1986. 528 p.).
8. Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow, Nauka, 1986. 736 p.
9. Bagayev S.N., Orlov V.A., Panov S.V. The Law of Motion of Brownian Particles at Short Observation Times. *Laser Physics*, 2001, vol. 11, no. 11, pp. 1232–1234.
10. Lucic B., Jeney S., Tischer C., Kulik A.J., Forro L., Florin E.-L. Direct observation of nondiffusive motion of a Brownian particle. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, pp. 160601-1–160601-4.
11. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [The equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1977. 736 p.
12. Prudnikov A.P., Brychkov Iu.A., Marichev O.I. *Integraly i riady* [Integrals and series]. Moscow, Nauka, 1981. 800 p.
13. Rubinshtein L.I. *Problema Stefana* [Stefan problem]. Riga, Zvaigzne, 1967. 458 p.
14. Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. Blackie & Son, 1930. (Russ. ed.: Volterra V. *Teoriia funktsionalov, integral'nykh i integro-differentsial'nykh uravnenii*. Moscow, Nauka, 1982. 304 p.).
15. Nikiforov A.F., Uvarov V.B. *Spetsial'nye funktsii matematicheskoi fiziki* [Special functions of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1984. 344 p.
16. Morozov A.N. *Neobratimye protsessy i brounovskoe dvizhenie* [Irreversible processes and Brownian motion]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1997. 332 p.
17. Morozov A.N., Skripkin A.V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process. *Physics Letters A*, 2011, vol. 375, pp. 4113 – 4115.
18. Morozov A.N., Skripkin A.V. Opisaniye ispareniia sfericheskoi chastitsy zhidko-sti kak nemarkovskogo sluchainogo protsessa s ispol'zovaniem integral'nykh stokhasticheskikh uravnenii [Description of evaporation of a spherical particle of the fluid as a non-Markovian stochastic process with the use of integral stochastic equations]. *Izvestiia VUZov. Ser. Fizika*, 2010, no. 11, pp. 55 – 64.
19. Morozov A.N., Skripkin A.V. Rasprostraneniye tepla v prostranstve vokrug tsi-lindricheskoi poverkhnosti kak nemarkovskii sluchainyi protsess [Distribution of heat in the space around the cylindrical surface of a non-Markovian random process]. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 2011, vol. 84, no. 6, pp. 1121 – 1127.
20. Morozov A.N. Metod opisaniia nemarkovskikh protsessov, zadavaemykh lineinym integral'nym preobrazovaniem [Method of description of non-Markovian processes defined by a linear integral transformation]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Bulletin of the Bauman MSTU. Ser. Natural science], 2004, no. 3, pp. 47 – 56.