электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Представления эволюционных полугрупп с помощью формул Фейнмана и интегралов Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве

77-30569/315838

 # 02, февраль 2012
Я.А. Бутко
УДК 517.987.4
МГТУ им. Н.Э. Баумана
yanabutko@yandex.ru

Введение

В настоящей работе рассматривается новый метод исследования эволюционных систем. Метод основан на представлении соответствующих эволюционных полугрупп (или, что то же самое, решений соответствующих эволюционных уравнений) с помощью формул Фейнмана, т.е. в виде пределов конечнократных интегралов при стремлении кратности к бесконечности. Как известно, для многих начально-краевых задач функции Грина неизвестны в явном виде. В то же время для некоторых таких задач удается получить формулы Фейнмана, содержащие конечнократные интегралы только от элементарных функций. Такие формулы Фейнмана позволяют проводить непосредственные вычисления решений эволюционных уравнений, пригодны для аппроксимации переходных вероятностей случайных процессов, полезны для компьютерного моделирования стохастической и квантовой динамики. Термин «формула Фейнмана» был введен в статье [65]; в серии работ [65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72] был развит метод получения формул Фейнмана для эволюционных уравнений на основе использования теоремы Чернова [24]. В последнее десятилетие этот метод активно применяется для описания различных типов динамики в областях евклидовых пространств и римановых многообразий, в бесконечномерных линейных и нелинейных пространствах, при исследовании p-адических аналогов уравнений математической физики (см., например, [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 35, 54, 57, 61, 65, 62]); а также для построения поверхностных мер на бесконечномерных многообразиях (см., например, [68, 69, 70, 71, 72]). Отметим, что формулы Фейнмана, представленные в настоящей работе, могут быть, в частности, использованы при моделировании квазичастиц с переменной массой. Такие квазичастицы встречаются, например, в моделях полупроводников, жидких кристаллов, при описании наноструктур. Некоторые частные случаи описанных в настоящей работе формул Фейнмана применялись, например, в работах [30, 52] для компьютерного моделирования соответствующей динамики. Кроме того, представленные в настоящей работе формулы Фейнмана для феллеровских полугрупп могут быть использованы для компьютерной симуляции соответствующих случайных процессов.

Пределы конечнократных интегралов в формулах Фейнмана совпадают с некоторыми функциональными интегралами по вероятностным мерам или по псевдомерам фейнмановского типа. Понятие функционального интеграла, или интеграла по траекториям, было введено Ричардом Фейнманом (на эвристическом уровне [33,34]), и три основных наблюдения Фейнмана заключаются в следующем. Во-первых, решение задачи Коши для уравнения Шредингера представляется в виде предела конечномерных интегралов по n-й декартовой степени конфигурационного пространства при стремлении n к бесконечности. Во-вторых, этот предел интерпретируется как интеграл по множеству траекторий в конфигурационном пространстве. И, наконец, замечено, что подынтегральная функция в этом функциональном интеграле содержит экспоненту от классического действия. Определение функционального интеграла по траекториям в фазовом пространстве было введено Фейнманом в работе [34] и имеет такую же структуру, что и в случае конфигурационного пространства. Только классическое действие выражено в терминах не лагранжиана, а функции Гамильтона. Формализация первого наблюдения Фейнмана называется *формулой Фейнмана*; второе наблюдение приводит к интегралам Фейнмана по траекториям в конфигурационном и фазовом пространствах (интегралы по бесконечномерным пространствам траекторий называются *функциональными*). Представления решений эволюционных уравнений с помощью функциональных интегралов называются также *формулами Фейнмана — Каца* (отметим, что сам М. Кац рассматривал только уравнение теплопроводности и в своей формуле использовал только интеграл по траекториям в конфигурационном пространстве).

В настоящее время интегралы по траекториям занимают одно из центральных мест в математическом аппарате теоретической физики. Это важные объекты в квантовой теории поля, особенно в теории калибровочных полей. С одной стороны, функциональные интегралы позволяют представить квантовую величину как сумму вкладов всевозможных виртуальных классических траекторий. И простая зависимость от постоянной Планка $\hbar$ показывает, что если $\hbar \to 0$, то доминирующий вклад дается реальной классической траекторией, т.е. траекторией, удовлетворяющей принципу наименьшего действия. С другой стороны, функциональные интегралы — это технически удобное средство исследования квазиклассических асимптотик, построения рядов теории возмущений и т.д. Во многих задачах полезно применять гамильтонов формализм квантовой механики и работать с (гамильтоновыми) интегралами Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве.

Существует много подходов к математически строгому определению интегралов Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве (при этом в рамках каждого из подходов возникает свой собственный класс функций, интегрируемых в данном смысле). Некоторые интегралы Фейнмана определяются с помощью преобразования Фурье и равенства Парсеваля (см. [63,2,62,27,23] и ссылки в них); некоторые определяются с помощью аналитического продолжения гауссовской меры на траекториях в фазовом пространстве [63], некоторые —

с помощью различных процедур регуляризации, например, как пределы интегралов по гауссовским мерам с расходящимся коэффициентом диффузии [26]; подынтегральные функции некоторых интегралов Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве реализованы как распределения Хиды в рамках теории White Noise Analysis [6]. В многочисленных подходах интегралы Фейнмана рассматриваются как пределы интегралов по конечномерным подпространствам траекторий, когда размерность подпространств стремится к бесконечности. Такие интегралы по траекториям иногда называются *секвенциальными*. Общее определение секвенциальной псевдомеры Фейнмана (интеграла Фейнмана по траекториям) в абстрактном пространстве (на множестве траекторий в фазовом пространстве, в частности) можно найти в книге [63]. Некоторые конкретные реализации представлены, например, в статьях [65, 19, 8, 1, 42, 50, 49, 48, 36]. В настоящей работе развивается подход Смолянова и его соавторов [65] (введенный в статьях [68, 69] для исследования поверхностных мер; на эту тему см. также [70, 72]). Данный подход позволяет связать интегралы Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве с гамильтоновыми формулами Фейнмана для эволюционных полугрупп.

В работе [4] Березин поставил задачу распознавания различных процедур квантования на языке интегралов Фейнмана. В настоящей работе можно найти частичный ответ к этой задаче. Именно, в данной работе представлены гамильтоновы формулы Фейнмана для полугрупп, порожденных τ-квантованием квадратичной функции Гамильтона. Эти формулы дают аппроксимации интегралов Фейнмана (по траекториям в фазовом пространстве) по псевдомере Φ^1_x, определенной в работе [19][1]. При этом, подынтегральные выражения различны при различных τ. Таким образом, процедура квантования различима.

В соответствии с замечанием Березина в [4], для представления конкретного решения эволюционного уравнения могут быть использованы интегралы Фейнмана по различным множествам траекторий в фазовом пространстве (сравн. [64]). И «качество» (например, степень гладкости) траекторий в конфигурационном пространстве обратно пропорционально «качеству» траекторий в импульсном пространстве. Это отражает принцип неопределенности Гейзенберга. Во многих работах рассматриваются непрерывные траектории в конфигурационном пространстве и разрывные траектории в импульсном пространстве (ср. [6, 1, 49, 42]). При нашем подходе картина симметрична: траектории в обоих пространствах имеют одинаковое «качество» — они кусочно постоянны. При этом, их односторонняя непрерывность различается (и, в некотором смысле, сопряжена).

Настоящая работа носит обзорный характер; в ней собраны воедино некоторые результаты недавних статей [8, 14, 18, 19, 20, 21], в которых последовательно развивается метод формул Фейнмана для исследования феллеровских полугрупп и изучается связь таких формул с интегралами Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве.

[1]Эта псевдомера соответствует случаю qp-квантования в статье [65], в которой построено семейство фейнмановских псевдомер Φ^τ, $\tau \in [0, 1]$, и получены формулы Фейнмана для некоторых шредигеровских групп, порожденных τ-квантованием функций, являющихся преобразованиями Фурье мер.

1. Предварительные сведения

1.1. Теорема Чернова и формулы Фейнмана. В настоящей работе рассматриваются эволюционные уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,q) = Lf(t,q),$$

где L — некоторый оператор, действующий на функцию $f(t,\cdot)$ переменной $q \in Q$; Q — некоторое пространство, которое мы будем называть конфигурационным пространством системы, описываемой этим уравнением; $t \geq 0$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,q) = Lf(t,q), \\ f(0,q) = f_0(q). \end{cases} \tag{1}$$

Если L — это ограниченный оператор на некотором банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ функций переменной q и $f_0 \in X$, то решение задачи Коши представимо в виде $f(t,q) = (e^{tL}f_0)(q)$, где оператор e^{tL} определяется как сумма ряда $e^{tL} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}L^n$, причем ряд сходится в равномерной операторной топологии. При этом, $\|e^{tL}\| \leq e^{t\|L\|}$, т.е. оператор e^{tL} снова является ограниченным для любого $t \geq 0$. Кроме того, как видно из определения e^{tL}, при $t,s \geq 0$ справедливы соотношения $e^{tL} \circ e^{sL} = e^{(t+s)L}$ и $e^{0L} = \mathrm{Id}$, где Id — тождественный оператор на X.

Как правило, однако, оператор L не является ограниченным. В этом случае приведенная выше схема решения задачи Коши (1) обобщается описанным ниже образом. Пусть символ $\mathcal{L}(X)$ обозначает пространство всех непрерывных линейных операторов на X с сильной операторной топологией. Если $\mathrm{Dom}(L) \subset X$ — это линейное подпространство и $L : \mathrm{Dom}(L) \to X$ — линейный оператор, то $\mathrm{Dom}(L)$ означает область определения L. Однопараметрическое семейство $(T_t)_{t\geq 0}$ ограниченных линейных операторов $T_t : X \to X$ называется сильно непрерывной полугруппой, если $T_0 = \mathrm{Id}$, $T_{s+t} = T_s \circ T_t$ для всех $s,t \geq 0$ и $\lim\limits_{t\to 0}\|T_t\varphi - \varphi\|_X = 0$ для всех $\varphi \in X$. Если $(T_t)_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$, то генератором этой полугруппы называется оператор L, определенный по формуле

$$L\varphi := \lim_{t\to 0}\frac{T_t\varphi - \varphi}{t}$$

с областью определения

$$\mathrm{Dom}(L) := \left\{\varphi \in X \,\middle|\, \lim_{t\to 0}\frac{T_t\varphi - \varphi}{t} \text{ существует как сильный предел}\right\}.$$

Таким образом, если L — ограниченный оператор на X, то $T_t = e^{tL}$ — это сильно непрерывная полугруппа на X с генератором L. И в случае, если генератор L — неограниченный оператор, будем иногда использовать обозначение e^{tL} для соответствующей полугруппы.

Можно показать, что для корректно поставленной в банаховом пространстве X задачи Коши (1) ее решение представляется в виде $f(t,q) = T_tf_0(q)$ для любого $f_0 \in \mathrm{Dom}(L)$. И значит решение задачи Коши (1) равносильно построению полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ с заданным генератором L. Как правило, полугруппу $(T_t)_{t\geq 0}$ не удается получить в явном виде, но удается различными методами ее аппроксимировать. В настоящей работе используется метод приближения, основанный на теореме Чернова [65].

Теорема 1 (Чернова). *Пусть* X *банахово пространство,* $F : [0, \infty) \to L(X)$ *— (сильно) непрерывное отображение, такое, что* $F(0) = \mathrm{Id}$ *и* $\|F(t)\| \le e^{ct}$ *для некоторой константы* $c \in [0, \infty)$ *и всех* $t \ge 0$*. Пусть* D *— линейное подпространство* $\mathrm{Dom}(F'(0))$*, такое, что сужение оператора* $F'(0)$ *на* D *замыкаемо. Пусть* $(L, \mathrm{Dom}(L))$ *— соответствующее замыкание. Если* $(L, \mathrm{Dom}(L))$ *является генератором сильно непрерывной полугруппы* $(T_t)_{t\ge 0}$*, то для всех* $t_0 > 0$ *последовательность операторов* $(F(t/n))^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится к* $(T_t)_{t\ge 0}$ *при* $n \to \infty$ *в сильной операторной топологии равномерно по* $t \in [0, t_0]$*, т.е.* $T_t = \lim\limits_{n\to\infty} (F(t/n))^n$*.*

Заметим, что производная в нуле функции $F : [0, \varepsilon) \to L(X)$, $\varepsilon > 0$, — это линейное отображение $F'(0) : \mathrm{Dom}(F'(0)) \to X$, такое, что

$$F'(0)g := \lim_{t\searrow 0} \frac{F(t)g - F(0)g}{t},$$

где $\mathrm{Dom}(F'(0))$ — векторное пространство всех тех элементов $g \in X$, для которых этот предел существует.

Семейство операторов $(F(t))_{t\ge 0}$ называется *эквивалентным* полугруппе $(T_t)_{t\ge 0}$ *по Чернову* (будем обозначать это так: $F(t) \sim T_t$), если это семейство удовлетворяет всем требованиям теоремы Чернова по отношению к этой полугруппе. Таким образом, если $F(t) \sim T_t$, то по теореме Чернова в пространстве $L(X)$ локально равномерно по t выполняется равенство

$$T_t = \lim_{n\to\infty} (F(t/n))^n. \tag{2}$$

Это равенство мы будем называть *формулой Фейнмана*. Мы используем такую терминологию, так как во многих случаях операторы $F(t)$ оказываются интегральными операторами, т.е. в правой части формулы Фейнмана стоит предел кратных интегралов при возрастании кратности к бесконечности, а именно Ричард Фейнман [33, 34]) впервые рассмотрел конструкцию функционального интеграла как предела обыкновенных многократных интегралов по пространству неограниченно возрастающей размерности. Любое представление решения начальной (или начально-краевой) задачи для эволюционного уравнения (или, эквивалентно, представление полугруппы, разрешающей данную задачу) в виде предела кратных интегралов при возрастании кратности к бесконечности мы будем называть формулой Фейнмана.

Пределы в формулах Фейнмана совпадают с некоторыми функциональными интегралами по вероятностным мерам или по фейнмановским псевдомерам на множестве траекторий некоторой физической системы. Представление решения начальной (или начально-краевой) задачи для эволюционного уравнения (или, эквивалентно, представление поугруппы, разрешающей данную задачу) в виде функционального интеграла обычно называется *формулой Фейнмана — Каца*. Таким образом, кратные интегралы в формуле Фейнмана для некоторой задачи аппроксимируют функциональный интеграл в формуле Фейнмана — Каца, представляющей решение этой же задачи. Такие аппроксимации во многих случаях представляют собой кратные интегралы только от элементарных функций и, следовательно, могут быть использованы для непосредственных вычислений и моделирования рассматриваемой динамики.

Замечание 1. Пусть операторы A, B, $A+B$ являются генераторами сильно непрерывных полугрупп e^{tA}, e^{tB} и $e^{t(A+B)}$ на некотором банаховом пространстве X соответственно, причем операторы A и B не коммутируют. Тогда $e^{tA}\circ e^{tB}\neq e^{t(A+B)}\neq e^{tB}\circ e^{tA}$. Тем не менее, можно показать, что $e^{tA}\circ e^{tB}\sim e^{t(A+B)}$, $e^{tB}\circ e^{tA}\sim e^{t(A+B)}$, и, значит, из теоремы Чернова следует равенство

$$e^{t(A+B)}=\lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{t}{n}A}\circ e^{\frac{t}{n}B}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{t}{n}B}\circ e^{\frac{t}{n}A}\right]^n.$$

Последняя формула широко известна как формула Троттера.

Замечание 2. Пусть L — ограниченный оператор. Можно показать, что $\mathrm{Id}+tL\sim e^{tL}$, и, значит, по теореме Чернова

$$e^{tL}=\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{Id}+\frac{t}{n}L\right)^n,$$

что обобщает классическую формулу математического анализа $e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Равенство (2) мы будем называть *лагранжевой формулой Фейнмана*, если $F(t)$, $t>0$, — это интегральные операторы, ядра которых представляются элементарными функциями (см., например, формулу (25)); если $F(t)$ — это псевдо-дифференциальные операторы (определение будет дано в секции 1.2), то мы говорим о *гамильтоновой формуле Фейнмана* (см., например, формулу (23)). Такая терминология связана с тем, что лагранжевы формулы Фейнмана дают аппроксимации для функциональных интегралов по множеству траекторий в конфигурационном пространстве системы (чья эволюция описывается полугруппой $(T_t)_{t\geq 0}$), в то время, как гамильтоновы формулы Фейнмана соответствуют интегралам Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве некоторой эволюционной системы. Конечно же, существуют и другие типы формул Фейнмана, в частности, формулы Фейнмана, соответствующие функциональным интегралам по траекториям в пространстве импульсов.

1.2. Псевдо-дифференциальные операторы, символы и τ-квантование. Будем использовать следующие обозначения: $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^d$ функций с компактным носителем; $S(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца быстро убывающих функций; $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство всех непрерывных на $\mathbb{R}^d$ функций, убывающих на бесконечности к нулю (это банахово пространтсво с нормой $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$); $C_\infty^k(\mathbb{R}^d)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций, убывающих к нулю на бесконечности вместе со всеми своими производными (это банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{(k)}:=\sum_{|\alpha|\leq k}\|\partial^\alpha u\|_\infty,$$

где $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$ и $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$). Мы используем следующие обозначения для прямого и обратного преобразования Фурье:

$$\widetilde{f}(p) = (2\pi)^{-d/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ip\cdot q} f(q)dq \quad \text{and} \quad \mathcal{F}^{-1}[f](q) = (2\pi)^{-d/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot q} f(p)dp.$$

Пусть $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ — измеримая функция и $\tau \in [0,1]$. Определим псевдо-дифференциальный оператор (для краткости ΨDO) $\widehat{H}_\tau(\cdot, D)$ с τ-символом $H(q,p)$ на банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ некоторых функций на $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$\widehat{H}_\tau(q,D)\varphi(q) = (2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot(q-q_1)} H(\tau q + (1-\tau)q_1, p)\,\varphi(q_1)\,dq_1 dp, \tag{3}$$

где область определения $\mathrm{Dom}(\widehat{H}_\tau(\cdot, D))$ этого оператора — множество всех $\varphi \in X$ таких, что правая часть формулы (3) корректно определена как элемент $(X, \|\cdot\|_X)$. В дальнейшем мы будем рассматривать псевдо-дифференциальные операторы на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Мы будем всегда предполагать что множество пробных функций $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ входит в область определения оператора $\widehat{H}_\tau(\cdot, D)$.

Отображение $H \mapsto \widehat{H}_\tau(\cdot, D)$ из пространства функций на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ в пространство линейных операторов на $(X, \|\cdot\|_X)$ будем называть τ-квантованием, оператор $\widehat{H}_\tau(\cdot, D)$ будем называть τ-квантованием функции H. Отметим, что если символ H есть сумма функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных q или p, то псевдо-дифференциальные операторы $\widehat{H}_\tau(\cdot, D)$ совпадают при всех $\tau \in [0,1]$ (в таком случае, будем говорить, что функция H есть символ оператора $\widehat{H}$, отбрасывая упоминание о τ). Если $H(q,p) = qp = pq$, $q,\ p \in \mathbb{R}^1$, то $\widehat{H}_\tau(q,D)\,\varphi(q) = -i\tau q\dfrac{\partial}{\partial q}\varphi(q) - i(1-\tau)\dfrac{\partial}{\partial q}(q\varphi(q))$. Таким образом, различные τ соответствуют различному порядку применения некоммутирующих операторов. При этом, «qp»-квантование получается при $\tau = 1$, «pq»-квантование — при $\tau = 0$ и квантование Вейля — при $\tau = 1/2$. Функция $H(q,p)$ обычно рассматривается как функция Гамильтона некоторой классической системы. Тогда оператор $\widehat{H}_\tau(\cdot, D)$ — это гамильтониан квантовой системы, полученной при процедуре τ-квантования из классической системы с функцией Гамильтона H.

1.3. Отрицательно определенные функции. Понятие отрицательно определенной функции введено Шенбергом в связи с изометрическими вложениями метрических пространств в гильбертово пространство.

Определение 1. Функция $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ называется *отрицательно определенной*, если для любого $m \in \mathbb{N}$ и всех $p_1,\ \ldots,\ p_m \in \mathbb{R}^d$ матрица

$$\left(\psi(p_j) + \overline{\psi(p_k)} - \psi(p_j - p_k)\right)_{j,k=1,\ldots,m}$$

является положительно эрмитовой, т.е. если для всех $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство

$$\sum_{j,k=1}^{m}\left(\psi(p_j) + \overline{\psi(p_k)} - \psi(p_j - p_k)\right)\,\lambda_j\overline{\lambda_k} \ge 0.$$

Отметим, что *отрицательно определенная* функция не равна какой-либо *положительно определенной* функции, взятой со знаком минус. Напомним, что функция $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ называется *положительно определенной*, если для любого $k \in \mathbb{N}$ и для любых векторов $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^d$ матрица $\big(u(p_i - p_j)\big)_{i,j=1,\ldots,k}$ является положительно эрмитовой, т.е. для всех $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^{k} u(p_i - p_j)\lambda_i\overline{\lambda}_j \geq 0$.

Следствие 1. Если функция $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ является положительно определенной, то функция $[p \mapsto u(0) - u(p)]$ отрицательно определена.

Более глубокая связь между положительно и отрицательно определенными функциями будет видна из теоремы 2, которая также обосновывает определение непрерывных отрицательно определенных функций посредством формулы Леви — Хинчина.

Определение 2. Функция $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ называется *непрерывной отрицательно определенной функцией*, если ψ задается по *формуле Леви — Хинчина*

$$\psi(p) = c + ib \cdot p + p \cdot Ap + \int\limits_{y \neq 0} \left(1 - e^{iy \cdot p} + \frac{iy \cdot p}{1 + |y|^2}\right) N(dy). \tag{4}$$

Набор (c, b, A, N), состоящий из $c \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^d$, симметричной неотрицательной матрицы $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ и меры Радона N на $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{y \neq 0} \frac{|y|^2}{1 + |y|^2} N(dy) < \infty,$$

называется *характеристиками Леви* (функции ψ). Мера N часто называется *мерой Леви*.

Очевидно, характеристики Леви однозначно определяют функцию ψ и однозначно определяются по ней.

Теорема 2. *Для функции $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ следующие свойства эквивалентны:*

а) функция ψ непрерывна и отрицательно определена в смысле определения 1;

б) функция ψ задана формулой Леви — Хинчина (4)*;*

в) выполнено неравенство $\psi(0) \geq 0$ и функция $e^{-t\psi}$ при всех $t > 0$ является непрерывной и положительно определенной.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в монографиях Якоба [44] или Берга и Форста [5](II §7). Все непрерывные положительно определенные функции характеризуются следующей теоремой Бохнера.

Теорема 3 (Бохнера). *Функция $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ является непрерывной и положительно определенной тогда и только тогда, когда она является преобразованием Фурье ограниченной меры Радона $\mu \in \mathcal{M}_b^+(\mathbb{R}^d)$, т.е. когда*

$$\varphi(p) = \widehat{\mu}(p) := (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot q} \mu(dq).$$

Из определения 1 непосредственно следует, что отрицательно определенные функции имеют положительную вещественную часть $\operatorname{Re}\psi \geq 0$, удовлетворяют соотношению $\overline{\psi(p)} = \psi(-p)$ и что $\sqrt{|\psi(\cdot)|}$ является субаддитивной функцией, т.е.

$$\sqrt{|\psi(p_1+p_2)|} \leq \sqrt{|\psi(p_1)|} + \sqrt{|\psi(p_2)|}, \qquad p_1, p_2 \in \mathbb{R}^d.$$

Если функция ψ непрерывна, то последовательное применение вышеуказанного неравенства влечет следующую оценку роста непрерывной отрицательно определенной функции:

$$|\psi(p)| \leq 2 \sup_{|\eta|\leq 1} |\psi(\eta)| \left(1+|p|^2\right), \qquad p \in \mathbb{R}^d. \tag{5}$$

1.4. Феллеровские полугруппы и их генераторы. Семейство операторов $(T_t)_{t\geq 0}$ называется *феллеровской полугруппой*, если:

а) $(T_t)_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$;

б) все отображения T_t сжимающие, т.е. $\|T_t\| \leq 1$ для любого $t \geq 0$;

в) все T_t сохраняют положительность, т.е. для любого $t \geq 0$ из неравенства $\varphi \geq 0$ следует неравенство $T_t\varphi \geq 0$.

Генератор $(L, \mathrm{Dom}(L))$ феллеровской полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ будем называть *феллеровским генератором*.

Строго марковский процесс $(X_t)_{t\geq 0}$ с пространством состояний $\mathbb{R}^d$ называется *феллеровским процессом*, если соответствующее ему семейство операторов $(T_t)_{t\geq 0}$, заданное формулой

$$T_t u(x) = \mathbb{E}^x\left[u(X_t)\right] \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^d} u(y) P(0,x,t,dy), \quad u \in C_\infty(\mathbb{R}^d), \;\; t \geq 0, \;\; x \in \mathbb{R}^d,$$

является феллеровской полугруппой. К классу феллеровских процессов относятся многие диффузии, а также процессы Леви [58]. *Процесс Леви* — это стохастически непрерывный случайный процесс $(Y_t)_{t\geq 0}$ со стационарными и независимыми приращениями. Преобразование Фурье процесса Леви имеет простую структуру

$$\mathbb{E}^x\left[e^{ip\cdot(Y_t-x)}\right] = \mathbb{E}^0\left[e^{ip\cdot Y_t}\right] = e^{-t\psi(p)}, \tag{6}$$

где $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ — *характеристическая экспонента* процесса, которая является *непрерывной отрицательно определенной функцией*, т.е. ψ задается формулой Леви — Хинчина (4). Так как $(Y_t)_{t\geq 0}$ это марковский процесс, то каждое из соотношений (6) и (4) полностью характеризуют конечномерные распределения $(Y_t)_{t\geq 0}$, а значит и сам процесс.

Процесс Леви пространственно однороден. Следовательно, ассоциированная с ним полугруппа $(S_t)_{t\geq 0}$ является сверточной:

$$S_t u(x) = \mathbb{E}^x\left[u(Y_t)\right] = \mathbb{E}^0\left[u(Y_t+x)\right] = \int u(x+y)\,\mathbb{P}^0(Y_t \in dy) = u * \tilde{\mu}_t(dy),$$

$\tilde{\mu}_t(dy) = \mathbb{P}^0(Y_t \in -dy)$. Можно легко показать, что $(S_t)_{t\geq 0}$ действительно является феллеровской полугруппой с генератором

$$-\psi(D)u(x) = -(2\pi)^{-n} \int\int e^{i(x-q)\cdot p}\,\psi(p)\,u(q)\,dqdp = -(2\pi)^{-n/2}\int \psi(p)\,\widetilde{u}(p)\,e^{ix\cdot p}\,dp, \quad (7)$$

где $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Из оценки (5) вытекает, что интегралы в формуле (7) сходятся. Таким образом, оператор $\psi(D)$ — это псевдо-дифференциальный оператор с символом $\psi(p)$; оператор $\psi(D)$ можно рассматривать как аналог дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

Итак, генератором любого процесса Леви является псевдо-дифференциальный оператор $-\psi(D)$ с символом $-\psi(p)$, где ψ — характеристачеcкая экспонента процесса. Обратно, любой псевдо-дифференциальный оператор $-\psi(D)$ с символом $-\psi(p)$, где ψ есть непрерывная отрицательно определенная функция (т.е. задается формулой Леви — Хинчина (4)), является генератором процесса Леви. Рассмотрим несколько основных примеров непрерывных отрицательно определенных функций и соответствующих им процессов Леви: $\psi(p) = p^2$ соответствует процессу броуновского движения; $\psi(p) = ib\cdot p$ соответсвует процессу (неслучайного) сноса; $\psi(p) = |p|^\alpha$, $\alpha \in (0,2)$ соответствует так называемым α-устойчивым процессам; $\psi(p) = 1 - e^{-ia\cdot p}$ соответствует пуассоновскому случайному процессу со скачками на a; $\psi(p) = \sqrt{p^2+m^2} - m$ соответствует процессу Леви, называемому также релятивистской диффузией; подобная функция может рассматриваться как функция Гамильтона свободной классической релятивистской частицы без спина.

Вернемся теперь к общей ситуации. Пусть $(X_t)_{t\geq 0}$ феллеровский процесс с полугруппой $(T_t)_{t\geq 0}$. Рассмотрим функцию $\lambda_t(q,p) = \mathbb{E}^q\left[e^{ip\cdot(X_t-q)}\right]$, т.е. характеристическую функцию случайной величины $X_t - q$ при условии, что $X_0 = q$ почти наверное. Рассмотрим псевдо-дифференциальный оператор с 1-символом $\lambda_t(q,p)$. Тогда для любой функции $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\begin{aligned}
\widehat{(\lambda_t)}_1(q,D)\varphi(q) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot(q-q_1)}\lambda_t(q,p)\varphi(q_1)dq_1dp = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot(q-q_1)}\mathbb{E}^q\left[e^{ip(X_t-q)}\right]\varphi(q_1)dq_1dp = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot(q-q_1)}e^{ip\cdot(y-q)}\varphi(q_1)dq_1dp\,P(0,q,t,dy) = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\left[\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot(y-q_1)}\varphi(q_1)dq_1dp\right]P(0,q,t,dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)\,P(0,q,t,dy) = T_t\varphi(q).
\end{aligned}$$

Таким образом, для всех $t \geq 0$ сужение T_t на множество $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ будет псевдо-дифференциальным оператором с 1-символом $\lambda_t(q,p)$. Следовательно, феллеровский генератор L полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ (суженный на подходящее подпространство[2]) — это снова

[2]Вообще говоря, множество пробных функций $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ не обязано входить в область определения генератора. Обычно это требование накладывается дополнительно.

псевдо-дифференциальный оператор с 1-символом $-H(q,p) := \lim\limits_{t\to 0}\frac{\lambda_t(q,p)-1}{t}$. Заметим, что $\lambda_t(q,p) \neq e^{-tH(q,p)}$ в общем случае[3]. Таким образом, возникает задача восстановления символа (а значит, и самой) полугруппы по заданному символу генератора. В большинстве случаев, действие феллеровской полугруппы в явном виде не известно. Однако, в дальнейшем изложении будет показано, как искомая полугруппа может быть аппроксимирована с помощью формул Фейнмана.

Известно множество достаточных условий того, что функция $-H(q,p)$ является 1-символом феллеровского генератора (см., например, [44]). Однако, все они разнородны, и вопрос о том, каковы же наиболее общие достаточные условия, остается открытым. Необходимые условия можно сформулировать в виде следующей теоремы (ср. [25]).

Теорема 4 (Курреж). *Пусть* $(L, \mathrm{Dom}(L))$ *— феллеровский генератор, такой, что* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{Dom}(L)$. *Тогда* $L\big|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}$ *— это псевдо-дифференциальный оператор*

$$L\varphi(q) = -\widehat{H}_1(q,D)\varphi(q) = -(2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot(q-q_1)}H(q,p)\,\varphi(q_1)\,dq_1dp, \tag{8}$$

с 1-символом $-H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, *причем функция* H *измерима, локально ограничена по обеим переменным* (q,p) *и при каждом фиксированном* q *удовлетворяет формуле Леви — Хинчина*

$$H(q,p) = c(q) + ib(q)\cdot p + p\cdot A(q)p + \int\limits_{y\neq 0}\left(1 - e^{iy\cdot p} + \frac{iy\cdot p}{1+|y|^2}\right)N(q,dy), \tag{9}$$

где $(c(q), b(q), A(q), N(q,\cdot))$ *при каждом* $q \in \mathbb{R}^d$ *являются характеристиками Леви функции* $H(q,\cdot)$, *т.е. при каждом* $q \in \mathbb{R}^d$ *имеем* $c(q) \geq 0$, $b(q) \in \mathbb{R}^d$; $A(q)$ *— симметричная неотрицательная матрица;* $N(q,\cdot)$ *— мера Радона на* $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, *удовлетворяющая условию* $\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{|y|^2}{1+|y|^2}N(q,dy) < \infty$.

Отметим, что равенство (9) автоматически влечет за собой непрерывность функции $p \mapsto H(q,p)$ для каждого $q \in \mathbb{R}^d$.

Пусть $\widehat{H}_1(q,D)$ — псевдо-дифференциальный оператор с 1-символом $H(q,p)$, удовлетворяющим условиям теоремы 4. Так как $H(q,p)$ задается по формуле Леви — Хинчина (9), то с помощью обратного преобразования Фурье мы можем показать, что интегро-дифференциальный оператор

$$A\varphi(q) = c(q)\varphi(q) + b(q)\cdot\nabla\varphi(q) - \sum_{j,k=1}^{d} A^{jk}(x)\partial_j\partial_k\varphi(q) - \\ - \int\limits_{y\neq 0}\left(\varphi(q+y) - \varphi(q) - \frac{y\cdot\nabla\varphi(q)}{1+|y|^2}\right)N(q,dy) \tag{10}$$

[3]Только в случае процесса Леви $H(q,p) = H(p)$ и $\lambda_t(q,p) \equiv \lambda_t(p) = e^{-tH(p)}$.

является расширением оператора $\left(\widehat{H}_1(\cdot, D), C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\right)$ на множество $C_\infty^2(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что нижеследующая лемма 1 и условие

$$\int\limits_{y\neq 0} |y|^2/(1+|y|^2)\, N(q,dy) < \infty$$

влекут за собой сходимость интеграла в (10). В дальнейшем мы будем одновременно использовать псевдо-дифференциальное представление (8) и интегро-дифференциальное представление (10).

Лемма 1. Для всех $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ выполняется неравенство

$$\left|\varphi(q+y) - \varphi(q) - \frac{y\cdot\nabla\varphi(q)}{1+|y|^2}\right| \leq 2\,\frac{|y|^2}{1+|y|^2}\,\|\varphi\|_{(2)}. \tag{11}$$

◀ По формуле Тейлора при всех $q, y \in \mathbb{R}^d$ имеем

$$\left|(1+|y|^2)\left(\varphi(q+y)-\varphi(q)-\frac{y\cdot\nabla\varphi(q)}{1+|y|^2}\right)\right| \leq \left|\varphi(q+y)-\varphi(q)-y\cdot\nabla\varphi(q)\right| +$$

$$+\,|y|^2\,|\varphi(q+y)-\varphi(q)| \leq \frac{1}{2}\left|\sum_{j,k=1}^{d} y_j y_k \partial_j\partial_k\varphi(\xi_{q,y})\right| + 2|y|^2\|\varphi\|_\infty \leq$$

$$\leq 2|y|^2\left(\|\varphi\|_\infty + \sqrt{\sum_{j,k=1}^{d}\|\partial_j\partial_k\varphi\|_\infty^2}\right) \leq 2|y|^2\,\|\varphi\|_{(2)}. \qquad ▶$$

В дальнейшем нам потребуется также следующая лемма.

Лемма 2. Справедливо равенство

$$\frac{|y|^2}{1+|y|^2} = \int\limits_{\mathbb{R}^d}(1-\cos(y\cdot p))\; g(p)\,dp, \qquad y\in\mathbb{R}^d,$$

где функция

$$g(p) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (2\pi\lambda)^{-d/2}\, e^{-|p|^2/2\lambda}\, e^{-\lambda/2}\, d\lambda$$

является интегрируемой и имеет абсолютные моменты всех порядков.

◀ Воспользуемся теоремами Тонелли, Фубини и формулой замены переменных. Тогда для любого $k\in\mathbb{N}_0$ получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}|p|^k\, g(p)\,dp = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (2\pi\lambda)^{-d/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|p|^k\, e^{-|p|^2/2\lambda}\,dp\; e^{-\lambda/2}\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (2\pi\lambda)^{-d/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\lambda^{k/2}|\eta|^k\, e^{-|\eta|^2/2}\lambda^{d/2}\,d\eta\; e^{-\lambda/2}\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi)^{-d/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\eta|^k\, e^{-|\eta|^2/2}\,d\eta\int\limits_0^\infty \lambda^{k/2}\, e^{-\lambda/2}\,d\lambda,$$

т.е. g имеет абсолютные моменты всех порядков. Кроме того, с помощью формулы

$$e^{-\lambda|y|^2/2} = (2\pi\lambda)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|p|^2/2\lambda}\, e^{iy\cdot p}\, dp$$

и теоремы Фубини получаем

$$\frac{|y|^2}{1+|y|^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda|y|^2/2}\right) e^{-\lambda/2}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^d} (2\pi\lambda)^{-n/2}\big(1 - e^{iy\cdot p}\big) e^{-|p|^2/2\lambda}\, e^{-\lambda/2}\, dp\, d\lambda = \int\limits_0^\infty \left(1 - e^{iy\cdot p}\right) g(p)\, dp.$$

Так как левая часть вещественная, то такова же и правая часть. Это и доказывает утверждение теоремы. ►

2. Гамильтоновы формулы Фейнмана для феллеровских полугрупп

Рассмотрим функцию $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, которая измерима, локально ограничена по обеим переменным (q,p) и при каждом фиксированном q удовлетворяет формуле Леви — Хинчина (9), т.е. $H(q,\cdot)$ является непрерывной отрицательно определенной функцией при всех $q \in \mathbb{R}^d$. Предположим, что:

а) $\sup\limits_{q\in\mathbb{R}^d} |H(q,p)| \le \kappa(1+|p|^2)$ при всех $p \in \mathbb{R}^d$ и некоторого $\kappa > 0$;

б) отображение $p \mapsto H(q,p)$ равномерно (по $q \in \mathbb{R}^d$) непрерывно в $p = 0$;

в) отображение $q \mapsto H(q,p)$ непрерывно при всех $p \in \mathbb{R}^d$.

Рассмотрим ΨDO $\widehat{H}_1(\cdot, D)$ с 1-символом $H(q,p)$, т.е. для всех $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\widehat{H}_1(q,D)\varphi(q) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot q} H(q,p)\widetilde{\varphi}(p)\, dp. \tag{12}$$

Отметим, что, благодаря оценке (5), условие а) означает, что ΨDO $\widehat{H}_1(\cdot, D)$ является своего рода оператором с ограниченными «коэффициентами» $c(q)$, $b(q)$, $A(q)$, $N(q,\cdot)$.

Предположение 1. Функция $H(q,p)$ такова, что оператор $-\widehat{H}_1(\cdot, D)$ замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Кроме того, множество пробных функций $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ является существенной областью определения этого генератора.

Замечание 3. Достаточные условия на функцию $H(q,p)$ для того, чтоб выполнялось первое условие предположения 1, приведены, например, в [44] (теоремы 2.6.4, 2.6.9, 2.7.9, 2.7.16, 2.7.19, 2.8.1) и в [46]. В этих работах во всех конструкциях $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ всегда предполагалось существенной областью определения. Второе условие предположения 1 выполняется, например, для генераторов всех процессов Леви (см. [58], теорема 31.5).

Рассмотрим теперь псевдо-дифференциальные операторы $F(t)$ с 1-символом $e^{-tH(q,p)}$, т.е. при всех $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$F(t)\varphi(q) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot q} e^{-tH(q,p)} \widetilde{\varphi}(p)\, dp. \tag{13}$$

Лемма 3. Для каждого $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ функция $F(t)\varphi$ принадлежит пространству $C_\infty(\mathbb{R}^d)$.

◄ Преобразование Фурье $\widetilde{\varphi}$ пробной функции $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ является элементом пространства Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ быстро убывающих функций. Так как функция $q \mapsto e^{-tH(q,p)}$ непрерывна (согласно условию в)) и ограничена ($\operatorname{Re} H \geq 0$ по свойствам непрерывных отрицательно определенных функций), то по теореме Лебега о мажорированной сходимости отображение $F(t)$ переводит $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ в $C(\mathbb{R}^d)$.

Докажем, что $F(t)\varphi(q) \to 0$ при $|q| \to \infty$. Так как $H(q,\cdot)$ — непрерывная отрицательно определенная функция при всех $q \in \mathbb{R}^d$, то по теореме 2 $e^{-tH(q,\cdot)}$ является положительно определенной при всех $q \in \mathbb{R}^d$ и всех $t > 0$. Поэтому функция

$$\left[p \mapsto h_t(q,p) := e^{-tH(q,0)} - e^{-tH(q,p)}\right]$$

также является непрерывной отрицательно определенной при всех $q \in \mathbb{R}^d$ (следствие 1). Таким образом, $h_t(q,\cdot)$ удовлетворяет формуле Леви — Хинчина:

$$h_t(q,p) = c_t(q) + ib_t(q)\cdot p + p\cdot A_t(q)p + \int\limits_{y\neq 0} \left(1 - e^{iy\cdot p} + \frac{iy\cdot p}{1+|y|^2}\right) N_t(q,dy), \tag{14}$$

где $c_t(q)$, $b_t(q)$, $A_t(q)$, $N_t(q,\cdot)$ для каждого $q \in \mathbb{R}^d$ — характеристики Леви функции $h_t(q,\cdot)$. Можно рассмотреть псевдо-дифференциальный оператор $h_t(q,D)$ с 1-символом $h_t(q,p)$, т.е. для каждого $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\begin{aligned} h_t(q,D)\varphi(q) &= (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot q} h_t(q,p)\widetilde{\varphi}(p)\, dp = \\ &= c_t(q)\varphi(q) + b_t(q)\cdot\nabla\varphi(q) - \sum_{j,k=1}^d A_t^{jk}(q)\partial_j\partial_k u(q) - \\ &\quad - \int\limits_{y\neq 0} \left(\varphi(q+y) - \varphi(q) - \frac{y\cdot\nabla\varphi(q)}{1+|y|^2}\right) N_t(q,dy). \end{aligned} \tag{15}$$

Отметим, что

$$F(t)\varphi(q) = (2\pi)^{-d/2} e^{-tH(q,0)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot q}\widetilde{\varphi}(p)\, dp - (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot q} h_t(q,p)\widetilde{\varphi}(p)\, dp. \tag{16}$$

Так как $\operatorname{Re} H \geq 0$, то $\sup\limits_{q\in\mathbb{R}^d} \left|e^{-tH(q,0)}\right| \leq 1$, и, значит, по теореме Римана — Лебега первый интеграл в правой части формулы (16) стремится к нулю при $|q| \to \infty$. Таким образом, осталось показать, что

$$\left[q \mapsto (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot q} h_t(q,p)\widetilde{\varphi}(p)\,dp\right] \in C_\infty(\mathbb{R}^d).$$

Так как функция φ имеет компактный носитель, то существует такое $R > 0$, что $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R(0)$. Поэтому для всех $|q| > 2R$ формула (15) имеет вид:

$$|h_t(q,D)\varphi(q)| = \left|\int\limits_{y\neq 0} \varphi(q+y)\, N_t(q,dy)\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{|y|>R} \varphi(q+y)\, N_t(q,dy)\right| \le 2 \int\limits_{y\neq 0} \frac{|y/R|^2}{1+|y/R|^2} N_t(q,dy)\cdot \|\varphi\|_\infty.$$

Здесь мы использовали элементарное неравенство $\frac{1}{2} \le \frac{t^2}{1+t^2}$, верное при $|t| > 1$ и примененное при $|y| > R$, а также тем, что $\varphi(q+y) = 0$ при $|q| > 2R$ и $|y| \le R$. Теперь с помощью леммы 2, представления Леви — Хинчина для функции $h_t(q,\cdot)$ и оценки (5) для непрерывной отрицательно определенной функции $h_t(q, \frac{\cdot}{R})$ можно получить, что

$$|h_t(q,D)\varphi(q)| \le 2 \int\limits_{y\neq 0} \int\limits_{\mathbb{R}}^{d} \left(1-\cos\frac{y\cdot\eta}{R}\right) g(\eta)\,d\eta\, N_t(q,dy)\cdot\|\varphi\|_\infty \le$$

$$\le 2\int\limits_{\mathbb{R}}^{d} \operatorname{Re} h_t\left(q,\frac{\eta}{R}\right) g(\eta)\,d\eta\cdot\|\varphi\|_\infty \le 2\int\limits_{\mathbb{R}}^{d} \left|h_t\left(q,\frac{\eta}{R}\right)\right| g(\eta)\,d\eta\cdot\|\varphi\|_\infty \le$$

$$\le 2 \sup_{|\xi|\le 1/R} |h_t(q,\xi)| \int\limits_{\mathbb{R}}^{d} (1+|\eta|^2)\, g(\eta)\,d\eta\cdot\|\varphi\|_\infty.$$

Так как функция $g(\eta)$ имеет абсолютные моменты всех порядков, то

$$|h_t(q,D)\varphi(q)| \le c_g \sup_{q\in\mathbb{R}^d} \sup_{|\xi|\le 1/R} |h_t(q,\xi)|\cdot\|\varphi\|_\infty \quad \text{при всех} \quad |q| > 2R.$$

Так как $h_t(q,0) = 0$, то условие (б)) означает, что $\lim_{|q|\to\infty} h_t(q,D)\varphi(q) = 0$. Таким образом, $h_t(q,\cdot)\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$. ►

Лемма 4. Для любого $t > 0$ отображение $F(t)$ может быть продолжено до сжимающего отображения $F(t) : C_\infty(\mathbb{R}^d) \to C_\infty(\mathbb{R}^d)$.

◄ Воспользуемся техникой замораживания коэффициентов (см., например, [45]). Для каждого $t > 0$ и каждого фиксированного $q_0 \in \mathbb{R}^d$ рассмотрим псевдо-дифференциальный оператор $F^{q_0}(t)$ с 1-символом $e^{-tH(q_0,p)}$, т.е. для любой функции $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$F^{q_0}(t)\varphi(q) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot q} e^{-tH(q_0,p)}\widetilde{\varphi}(p)\,dp.$$

Тогда $F(t)\,\varphi(q) = F^q(t)\,\varphi(q)$ при всех $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ и всех $q \in \mathbb{R}^d$. Так как для каждого $q_0 \in \mathbb{R}^d$ функция $e^{-tH(q_0,\cdot)}$ положительно определена, то существует сверточная полугруппа $(\mu_t^{q_0})_{t\geq 0}$, такая, что $\mathcal{F}^{-1}[\mu_t^{q_0}] = (2\pi)^{-d/2}e^{-tH(q_0,\cdot)}$ и $F^{q_0}(t)\varphi(q) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(q-y)\mu_t^{q_0}(dy)$. Следовательно, для каждого $q_0 \in \mathbb{R}^d$ семейство $(F^{q_0}(t))_{t\geq 0}$ является феллеровской полугруппой и при всех $q,\, q_0 \in \mathbb{R}^d$ имеем

$$|F^{q_0}(t)\varphi(q)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(q-y)\mu_t^{q_0}(dy)\right| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Тогда $\|F(t)\varphi\|_\infty = \sup\limits_{q\in\mathbb{R}^d}|F(t)\varphi(q)| = \sup\limits_{q\in\mathbb{R}^d}|F^q(t)\varphi(q)| \leq \|\varphi\|_\infty$ для любого $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$. Таким образом, по теореме о продолжении ограниченного линейного оператора (см. [56], с. 9) семейство $F(t)$ может быть продолжено до семейства сжимающих отображений из пространства $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ в пространство $C_\infty(\mathbb{R}^d)$. ►

Теорема 5. *Пусть функция $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ измерима, локально ограничена по совокупности аргументов (q,p) и $H(q,\cdot)$ является непрерывной отрицательно определенной функцией при каждом $q \in \mathbb{R}^d$. Пусть также выполнены условия а), б) и в) и верно предположение 1. Тогда семейство $(F(t))_{t\geq 0}$ эквивалентно по Чернову сильно непрерывной полугруппе $(T_t)_{t\geq 0}$, порожденной замыканием псевдо-дифференциального оператора $-\widehat{H}_1(\cdot,D)$ с 1-символом $-H(q,p)$. Тем самым, справедлива формула Фейнмана $T_t = \lim\limits_{n\to\infty}\Big[F(\frac{t}{n})\Big]^n$ в пространстве $L(C_\infty(\mathbb{R}^d))$ локально равномерно по $t \geq 0$.*

◄ По лемме 4 каждый оператор $F(t)$ является сжимающим отображением на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, и, значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что при всех $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ верно равенство $\lim\limits_{t\to 0}\|F(t)\varphi - \varphi\|_\infty = 0$ и что $F'(0) = -\widehat{H}_1(\cdot,D)$ на некоторой существенной области определения генератора $-\widehat{H}_1(\cdot,D)$.

Для каждой функции $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ с учетом а) получаем

$$\lim_{t\to 0}\|F(t)\varphi - \varphi\|_\infty = \lim_{t\to 0}\sup_{q\in\mathbb{R}^d}\left|(2\pi)^{-d/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot q}\widetilde{\varphi}(p)[e^{-tH(q,p)}-1]\,dp\right| \leq$$

$$\leq \lim_{t\to 0}(2\pi)^{-d/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\widetilde{\varphi}(p)|\sup_{q\in\mathbb{R}^d}\left\{\left|\frac{e^{-tH(q,p)}-1}{-tH(q,p)}\right|\,|-tH(q,p)|\right\}dp \leq$$

$$\leq \lim_{t\to 0}(2\pi)^{-d/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} t\kappa(1+|p|^2)|\widetilde{\varphi}(p)|\,dp = 0,$$

поскольку $\widetilde{\varphi} \in S(\mathbb{R}^d)$. Итак, $\lim\limits_{t\to 0}\|F(t)\varphi - \varphi\|_\infty = 0$ для всех $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Так как $\|F(t)\| \leq 1$, то последнее неравенство справедливо и при всех $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$, что может быть показано с помощью приема «3-эпсилон».

Аналогичным образом для любой функции $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ получим

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{F(t)\varphi-\varphi}{t}+\widehat{H}_1(\cdot,D)\varphi\right\|_\infty =$$
$$= \lim_{t\to 0}\sup_{q\in\mathbb{R}^d}\left|(2\pi)^{-d/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot q}\widetilde{\varphi}(p)\left[\frac{e^{-tH(q,p)}-1}{t}+H(q,p)\right]dp\right| \leq$$
$$\leq \lim_{t\to 0}(2\pi)^{-d/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\widetilde{\varphi}(p)|\frac{t\kappa^2(1+|p|^2)^2}{2}\,dp = 0.$$

Таким образом, все требования теоремы Чернова выполнены, а значит, семейство $F(t)$ эквивалентно по Чернову полугруппе T_t с генератором $-\widehat{H}_1(\cdot,D)$. ►

З а м е ч а н и е 4. Из результатов работы [18] (о формулах Фейнмана для аддитивных возмущений полугрупп) следует, что теорема (5) верна и в случае, если $c(\cdot):\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ — ограниченная снизу функция.

З а м е ч а н и е 5. Предположим дополнительно, что $H:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ удовлетворяет условию

$$\exists C>0 \quad \text{такое, что } \left\|\partial_q^\alpha\partial_p^\beta e^{-tH}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)}\leq C, \tag{17}$$

где $\alpha,\ \beta\in\mathbb{N}_0^d$, $\alpha=0\,\mathrm{or}\,1$, $\beta=0\,\mathrm{or}\,1$, $\partial_q^\alpha\partial_p^\beta$ — обобщенные производные. Отметим, что это условие выполнено, например, если $H:\ |H(q,p)|\geq c|p|^r$ при $|p|\gg 1$, для некоторых $c>0$ и $r\in(0,2)$. Тогда по теореме 2 работы [40] $F(t):L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)$. В этом случае $F(t)\varphi\in C_\infty(\mathbb{R}^d)\cap L_2(\mathbb{R}^d)$ для любой функции $\varphi\in C_\infty(\mathbb{R}^d)\cap L_2(\mathbb{R}^d)$. Тогда $F(t)\varphi$ будем записывать в явном виде, заданном формулой (13), подразумевая, что интегралы в правой части этой формулы есть L_2-предел некоторых регуляризованных (по аналогии с продолжением преобразования Фурье до унитарного оператора на $L_2(\mathbb{R}^d)$). При этом, формула Фейнмана из теоремы 5 становится гамильтоновой формулой Фейнмана:

$$(T_t\varphi)(q_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^{dn}}\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{2n}} e^{i\sum\limits_{k=1}^n p_k\cdot(q_{k-1}-q_k)}e^{-\frac{t}{n}\sum\limits_{k=1}^n H(q_{k-1},p_k)}\varphi(q_n)\,dq_1dp_1\cdots dq_ndp_n, \tag{18}$$

В работе [40] можно найти и другие условия на функцию H, гарантирующие, что $F(t):L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)$. Если функция H удовлетворяет достаточным условиям для того, чтобы функция $F(t)\varphi$ была элементом пространства $S(\mathbb{R}^d)$ при всех $\varphi\in S(\mathbb{R}^d)$, то для любой функции $\varphi\in S(\mathbb{R}^d)$ правая часть гамильтоновой формулы Фейнмана (18) корректно определена без дополнительных процедур регуляризации. Подобные достаточные условия могут быть найдены в следующей лемме.

Лемма 5. Пусть $H:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ непрерывная функция, причем для каждого $q\in\mathbb{R}^d$ отображение $p\mapsto H(q,p)$ отрицательно определено и $H(\cdot,\cdot)\in C^\infty(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$. Пусть также для всех $p\in\mathbb{R}^d$ и всех мультииндексов $\alpha,\ \beta\in\mathbb{N}_0^d$ выполняются оценки

$$\sup_{q\in\mathbb{R}^d}|\partial_p^\alpha\partial_q^\beta H(q,p)|\leq f_{\alpha,\beta}(p), \tag{19}$$

где функции $f_{\alpha,\beta}$ непрерывны на $\mathbb{R}^d$ и возрастают на бесконечности не быстрее полинома. Тогда $F(t)\varphi \in (\mathbb{R}^d)$ при всех $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$.

◄ Из леммы 4 следует, что $F(t)\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Покажем, что для всех $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}_0^d$ норма

$$\|F(t)\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{q\in\mathbb{R}^d} \left|q^\alpha \partial_q^\beta [F(t)\varphi](q)\right|$$

конечна. Заметим, что для любого мультииндекса $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ функция $\partial_q^\beta e^{-tH(q,p)+ip\cdot q}$ непрерывна. Из неравенства (19) следует, что эта функция также мажорируется (равномерно по $q \in \mathbb{R}^d$) некоторой непрерывной функцией аргумента p, возрастающей на бесконечности не быстрее полинома. Тогда по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$q^\alpha \partial_q^\beta [F(t)\varphi](q) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} q^\alpha \partial_q^\beta e^{-tH(q,p)+ip\cdot q} \widetilde{\varphi}(p)\, dp =$$

$$= (2\pi)^{-d/2} \sum_{0\le\gamma\le\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^d} q^\alpha \partial_q^\gamma (e^{ip\cdot q}) \partial_q^{\beta-\gamma} (e^{-tH(q,p)}) \widetilde{\varphi}(p) dp.$$

Так как $\partial_q^\gamma (e^{ip\cdot q}) = e^{ip\cdot q} R_\gamma(p)$, где R_γ — некоторый полином переменной p, то с помощью интегрирования по частям получим

$$q^\alpha \partial_q^\beta [F(t)\varphi](q) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{0\le\gamma\le\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^d} q^\alpha e^{ip\cdot q} \left[R_\gamma(p) \partial_q^{\beta-\gamma} (e^{-tH(q,p)}) \widetilde{\varphi}(p)\right] dp =$$

$$= (2\pi)^{-d/2} \sum_{0\le\gamma\le\beta} i^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \partial_p^\alpha e^{ip\cdot q} \left[R_\gamma(p) \partial_q^{\beta-\gamma} (e^{-tH(q,p)}) \widetilde{\varphi}(p)\right] dp =$$

$$= (2\pi)^{-d/2} \sum_{0\le\gamma\le\beta} (-i)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip\cdot q} \partial_p^\alpha \left[R_\gamma(p) \partial_q^{\beta-\gamma} (e^{-tH(q,p)}) \widetilde{\varphi}(p)\right] dp.$$

Так как функция $\partial_p^\alpha \left[R_\gamma(p) \partial_q^{\beta-\gamma} (e^{-tH(q,p)}) \widetilde{\varphi}(p)\right]$ мажорируется некоторой функцией из пространства $L_1(\mathbb{R}^d)$, не зависящей от переменной q, то из неравенства (19) следует, что выражение в последней строке наших выкладок оценивается сверху некоторой константой. Таким образом, норма $\|F(t)\varphi\|_{\alpha,\beta}$ конечна. ►

З а м е ч а н и е 6. В предположении 1 мы требовали существования сильно непрерывной полугруппы. Можно показать, что если дана сильно непрерывная полугруппа на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, символ генератора которой удовлетворяет всем условиям теоремы 5, то полугруппа автоматически будет феллеровской. При этом для каждого фиксированного n оператор $\left[F(t/n)\right]^n$ в формуле Фейнмана соответствует аппроксимации феллеровского процесса X_t марковской цепью $\left\{Y^{t/n}(k)\right\}_{k=0}^n$ с приращениями Леви. Эта марковская цепь получается путем разбиения временного интервала $[0,t]$ на n равных шагов и замораживания коэффициента q в переходных вероятностях процесса X_t на каждом шаге (ср. [7]). Кроме того, переходные ядра $\mu_{q,t/n}$ этой марковской цепи соответствуют переходному оператору $W_{t/n}$, $W_{t/n}\varphi(q) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\mu_{q,t/n}(dy)$. Следовательно, $\left[F(t/n)\right]^n = \left[W_{t/n}\right]^n$. Последнее равенство позволяет преобразовать полученную гамильтонову формулу Фейнмана для феллеровской полугруппы T_t, ассоциированной с процессом X_t, в лагранжеву формулу Фейнмана $T_t\varphi(q) = \lim\limits_{n\to\infty} \left[W_{t/n}\right]^n \varphi(q)$.

Пример 1. Рассмотрим в качестве 1-символа функцию $H(q,p) = a(q)|p|^\alpha$, где $\alpha \in (0,2]$ и $a(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ строго положительная ограниченная функция. Тогда псевдо-дифференциальный оператор $\widehat{H}_1(\cdot, D)$ является генератором феллеровской полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ (см. [60]). Если $\alpha = 2$, то эта полугруппа отвечает диффузионному процессу с переменным коэффициентом диффузии; если $\alpha \in (0,2)$, то получается процесс типа α-устойчивого. Все требования теоремы 5 выполнены. Поэтому по формуле (18) для любой $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ и любого $q_0 \in \mathbb{R}^d$ получаем:

$$(T_t\varphi)(q_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{dn}} \int\limits_{\mathbb{R}^{2dn}} e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} p_k\cdot(q_{k-1}-q_k)} e^{-\frac{t}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a(q_{k-1})|p_k|^\alpha} \varphi(q_n)\, dq_1 dp_1 \cdots dq_n dp_n.$$

Пример 2. Рассмотрим в качестве 1-символа функцию $H(q,p) = \sqrt{|p|^\alpha + m^2(q)} - m(q)$, где $m(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ — строго положительная ограниченная функция на $\mathbb{R}^d$, $\alpha \in (0,2]$. Если функция $m(\cdot)$ такова, что справедливо предположение 1 (для $m \equiv \mathrm{const}$ оно выполнено), то справедлива гамильтонова формула Фейнмана для соответствующей полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$:

$$(T_t\varphi)(q_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{dn}} \int\limits_{\mathbb{R}^{2dn}} e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} p_k\cdot(q_{k-1}-q_k)} e^{-\frac{t}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{|p_k|^\alpha + m^2(q_{k-1})} - m(q_{k-1})} \times$$
$$\times\, \varphi(q_n)\, dq_1 dp_1 \cdots dq_n dp_n,$$

где $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ и $q_0 \in \mathbb{R}^d$. В случае $\alpha = 2$ псевдо-дифференциальный оператор $-\widehat{H}_1(\cdot, D)$ можно трактовать как гамильтониан свободной квантовой релятивистской (квази)частицы с переменной массой (ср. [35, 41]).

3. Формулы Фейнмана для полугрупп, порожденных τ-квантованием квадратичной функции Гамильтона

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения: $C^m(\mathbb{R}^d)$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых функций; $C^{0,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ — пространство функций, удовлетворяющих условию Гельдера с параметром $\lambda \in (0,1]$; $C_b(\mathbb{R}^d)$ — пространство ограниченных непрерывных функций, $C_b^m(\mathbb{R}^d) = \{f \in C(\mathbb{R}^d);\ \partial^\alpha f \in C_b(\mathbb{R}^d),\ |\alpha| \leq m\}$ и $C_b^{m,\lambda}(\mathbb{R}^d) = C_b^m(\mathbb{R}^d) \cap \{f \in C(\mathbb{R}^d);\ \partial^\alpha f \in C^{0,\lambda}(\mathbb{R}^d),\ |\alpha| = m\}$.

Рассмотрим функцию Гамильтона $H(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, имеющую вид

$$H(q,p) = p\cdot A(q)p + ib(q)\cdot p + c(q), \tag{20}$$

где $A(q)$ — неотрицательно определенная (ненулевая) симметричная матрица; $b(q) \in \mathbb{R}^d$, $c(q) \in \mathbb{R}$ для всех $q \in \mathbb{R}^d$. Пусть, кроме того, $A(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ непрерывны и ограничены; при всех $p,\ q \in \mathbb{R}^d$ выполнено неравенство $p \cdot A(q)p \geq a_0|p|$ с некоторой константой $a_0 > 0$. Рассмотрим оператор $\widehat{H}_\tau(q, D)$ с τ-символом $H(q, p)$, $\tau \in [0, 1]$, определенный по формуле (3). Предположим, что $A(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ таковы, что оператор $-\widehat{H}_\tau(q, D)$ замыкаем, его замыкание служит генератором некоторой сильно непрерывной полугруппы $(T_t^\tau)_{t\geq 0}$ на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$, множество пробных функций $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ является существенной областью определения генератора.

3.1. Связь между различными квантованиями квадратичной функции. Заметим, что при $\tau = 1$ функция $H(q, p)$ является 1-символом (или «qp»-символом) оператора $\widehat{H}_1(q, D)$, который продолжается на множество $C^2(\mathbb{R}^d)$ по формуле

$$\widehat{H}_1(q, D)\varphi(q) = -\operatorname{tr}(A(q) \operatorname{Hess}\varphi(q)) + b(q) \cdot \nabla\varphi(q) + c(q)\varphi(q). \tag{21}$$

Лемма 6. Пусть $A(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $b(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^d)$, $c(\cdot) \in C(\mathbb{R}^d)$. Тогда для любого $\tau \in [0, 1]$ оператор $\widehat{H}_\tau(q, D)$ может быть продолжен на множество $C^2(\mathbb{R}^d)$ по формуле

$$\widehat{H}_\tau(q, D)\varphi(q) = -\operatorname{tr}(A(q) \operatorname{Hess}\varphi(q)) + [b(q) - 2(1-\tau)\operatorname{div} A(q)] \cdot \nabla\varphi(q) + \\ + [c(q) + (1-\tau)\operatorname{div} b(q) - (1-\tau)^2 \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} A(q))]\varphi(q).$$

Таким образом, $\widehat{H}_\tau(q, D)\varphi(q) = \widehat{H}_1^\tau(q, D)\varphi(q)$, где $\widehat{H}_1^\tau(q, D)\varphi(q)$ — псевдо-дифференциальный оператор с 1-символом $H^\tau(q, p) = p \cdot A(q)p + ib_\tau(q) \cdot p + c_\tau(q)$ и $b_\tau(q) = b(q) - 2(1-\tau)\operatorname{div} A(q)$, $c_\tau(q) = c(q) + (1-\tau)\operatorname{div} b(q) - (1-\tau)^2 \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} A(q))$.

◀ Рассмотрим случай $d = 1$ и $H(q, p) = A(q)p^2$ для упрощения выкладок. Пусть сначала $A(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Тогда для любой $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ имеем

$$\widehat{H}_\tau(q, D)\varphi(q) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ip(q-y)} H(\tau q + (1-\tau)y, p)\varphi(y)\, dydp =$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{B_R} \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi} e^{ip(q-y)} H(\tau q + (1-\tau)y, p)\varphi(y)\, dydp =$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi} A(\tau q + (1-\tau)y)\varphi(y) \int\limits_{B_R} e^{ip(q-y)} p^2 dpdy =$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi} A(\tau q + (1-\tau)y)\varphi(y)\mathcal{F}^{-1}[p^2\chi_{B_R}(p)](q-y)\, dy =$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \left\langle \mathcal{F}^{-1}[p^2\chi_{B_R}(p)](q-\cdot),\ A(\tau q + (1-\tau)\cdot)\varphi \right\rangle =$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \left\langle -\nabla^2\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B_R}(p)](q-\cdot),\ A(\tau q + (1-\tau)\cdot)\varphi \right\rangle =$$
$$= \lim_{R\to+\infty} \left\langle \mathcal{F}^{-1}[\chi_{B_R}(p)](q-\cdot),\ -\nabla^2 A(\tau q + (1-\tau)\cdot)\varphi \right\rangle =$$
$$= \left\langle \delta(q-\cdot),\ -\nabla^2 A(\tau q + (1-\tau)\cdot)\varphi \right\rangle = -A(\tau q + (1-\tau)y)\varphi''(y) -$$
$$2(1-\tau)A'(\tau q + (1-\tau)y)\varphi'(y) - (1-\tau)^2 A''(\tau q + (1-\tau)y)\varphi(y)\Big|_{y=q} =$$
$$= -A(q)\varphi''(q) - 2(1-\tau)A'(q)\varphi'(q) - (1-\tau)^2 A''(q)\varphi(q).$$

Здесь $B_R = [-R,\ R]$; χ_{B_R} — индикатор множества B_R; δ — дельта-функция Дирака; $\langle f,\ \ g\rangle$— действие обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R})$ на основную функцию $g \in S(\mathbb{R})$. Действительно, для $A(\cdot) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ функция $-\nabla^2 A(\tau q + (1-\tau)\cdot)\varphi \in S(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}^{-1}[\chi_{B_R}(p)] \in$ $\in C_{\infty}(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R})$. В случае, если $A(\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$, существует последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\{A_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$, сходящихся к A равномерно на $\mathbb{R}$ вместе со всеми своими производными до второго порядка включительно. Тогда обобщенная функция

$$A(\tau q + (1-\tau)\cdot)\mathcal{F}^{-1}[p^2\chi_{B_R}(p)](q-\cdot)$$

может быть аппроксимирована обобщенными функциями

$$A_n(\tau q + (1-\tau)\cdot)\mathcal{F}^{-1}[p^2\chi_{B_R}(p)](q-\cdot),$$

для которых вычисления, приведенные выше, справедливы. Таким же образом для $H(q,p) =$ $= ib(q)p + c(q)$ можно получить $\widehat{H}_\tau(q,D)\varphi(q) = ib(q)\varphi'(q) + i(1-\tau)b'(q)\varphi(q) + c(q)\varphi(q)$. В случае произвольного d выкладки аналогичны. ►

3.2. Гамильтоновы формулы Фейнмана. Используя связь между различными квантованиями одной и той же квадратичной функции и гамильтонову формулу Фейнмана (18) для случая $\tau = 1$, получим следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть $A(q)$ — неотрицательно определенная симметричная матрица, $b(q) \in \mathbb{R}^d$, $c(q) \geq 0$ при всех $q \in \mathbb{R}^d$ и пусть $A(\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, $b(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, $c(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Рассмотрим функцию Гамильтона $H(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, такую, что*

$$H(q,p) = p \cdot A(q)p + ib(q)\cdot p + c(q).$$

Пусть $\widehat{H}_\tau(q,D)$ — псевдо-дифференциальный оператор с τ-символом $H(q,p)$, где $\tau \in [0,1]$. Предположим, что $-\widehat{H}_\tau(q,D)$ замыкаем и его замыкание генерирует сильно непрерывную полугруппу $(T_t^\tau)_{t\geq 0}$ на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Пусть множество $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ является существенной областью определения генератора. Для любого $\tau \in [0,1]$ рассмотрим семейство псевдо-дифференциальных операторов $(F^\tau(t))_{t\geq 0}$, определенных при всех $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ по формуле

$$F^\tau(t)\varphi(q) = (2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ip(q-y)}e^{-tH^\tau(q,p)}\varphi(y)\,dydp, \tag{22}$$

где $H^\tau(q,p) = p\cdot A(q)p - ib_\tau(q)\cdot p + c_\tau(q)$, $b_\tau(q) = b(q) - 2(1-\tau)\operatorname{div} A(q)$, $c_\tau(q) =$ $= c(q) + (1-\tau)\operatorname{div} b(q) - (1-\tau)^2\operatorname{tr}(\operatorname{Hess} A(q))$. Тогда семейство $(F^\tau(t))_{t\geq 0}$ эквивалентно по Чернову полугруппе $(T_t^\tau)_{t\geq 0}$ и, значит, формула $T_t^\tau = \lim\limits_{n\to\infty}\left[F^\tau(\frac{t}{n})\right]^n$ справедлива в $\mathcal{L}(C_\infty(\mathbb{R}^d))$ локально равномерно по $t \geq 0$.

Эта теорема является непосредственным следствием леммы 6, теоремы 5 и замечания 4.

Замечание 7. Отметим, что $H^\tau : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию (17) (см. замечание 5). Таким образом, $F^\tau(t) : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ и формула, полученная в теореме 6 при всех $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ превращается в *гамильтонову формулу Фейнмана*:

$$(T_t^\tau \varphi)(q_0) = \lim_{n\to\infty} (2\pi)^{-dn} \int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{2n}} \exp\Big(i \sum_{k=1}^n p_k \cdot (q_{k-1} - q_k)\Big) \times$$

$$\times \exp\Big(-\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n H^\tau(q_{k-1}, p_k)\Big) \varphi(q_n)\, dq_1 dp_1 \cdots dq_n dp_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2\pi)^{-dn} \int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{2n}} \exp\Big(i \sum_{k=1}^n p_k \cdot (q_{k-1} - q_k)\Big) \exp\Big(-\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n p_k \cdot A(q_{k-1}) p_k\Big) \times$$

$$\times \exp\Big(-\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n \big[c(q_{k-1}) + (1-\tau)\,\mathrm{div}\, b(q_{k-1}) - (1-\tau)^2\, \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\, A(q_{k-1}))\big]\Big) \times$$

$$\times \exp\Big(-i\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n \big[b(q_{k-1}) - 2(1-\tau)\,\mathrm{div}\, A(q_{k-1})\big] \cdot p_k\Big) \varphi(q_n)\, dq_1 dp_1 \cdots dq_n dp_n. \quad (23)$$

Интегралы в этих равенствах надо понимать как L_2-предел некоторых регуляризованных. Если же коэффициенты $A(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ бесконечно дифференцируемы, то $F(t)\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ при всех $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ и интегралы в полученной гамильтоновой формуле Фейнмана имеют смысл без каких-либо дополнительных регуляризаций.

3.3. Лагранжевы формулы Фейнмана. Рассмотрим оператор $L = -\widehat{H}_1(\cdot, D)$, где $\widehat{H}_1(\cdot, D)$ задан формулой (21) и соответствует 1-квантованию функции Гамильтона (20). Пусть $A(q)$ — положительно определенная симметричная матрица при всех $q \in \mathbb{R}^d$, $A(\cdot)$, $b(\cdot)$ — непрерывные отображения, $c(\cdot)$ — непрерывная и ограниченная снизу функция. Предположим также, что существует $0 < \alpha \le 1$, такое, что $C_c^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ является существенной областью определения для замыкания $(L, \mathrm{Dom}(L))$ оператора $(L, C_c^{2,\alpha}(\mathbb{R}^d))$. Пусть это замыкание порождает сильно непрерывную полугруппу $(T_t^1)_{t\ge0}$ на $C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда из результатов работы [14] вытекает следующая лагранжева формула Фейнмана для полугруппы $(T_t^1)_{t\ge0}$.

Теорема 7 (см. [14])**.** *В предположениях, указанных выше, при всех $\varphi \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$, $q_0 \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$ справедлива лагранжева формула Фейнмана*

$$T_t^1\varphi(q_0) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\Big(\frac{t}{n}\sum_{j=1}^n V(q_{j-1})\Big) \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n A^{-1}(q_{j-1}) b(q_{j-1}) \cdot (q_j - q_{j-1})\Big) \times$$

$$\times p_A(t/n, q_0, q_1) \cdots p_A(t/n, q_{n-1}, q_n) \varphi(q_n)\, dq_1 \ldots dq_n, \quad (24)$$

где $V(q) = -c(q) - \dfrac{1}{4} A^{-1}(q) b(q) \cdot b(q)$, $a(q) = \det A(q)$, $p_A(t, q, y) := \dfrac{1}{\sqrt{a(q)(4\pi t)^d}} \times$ $\times \exp\Big(-\dfrac{A^{-1}(q)(q-y)\cdot(q-y)}{4t}\Big)$ *и сходимость локально равномерна по* $(q_0, t) \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$.

Из результатов леммы 6 и теоремы 7 вытекает лагранжева формула Фейнмана для полугруппы, порожденной τ-квантованием функции Гамильтона (20).

Теорема 8. *Пусть $A(q)$ — положительно определенная симметричная матрица, $b(q) \in \mathbb{R}^d$, $c(q) \ge 0$ при всех $q \in \mathbb{R}^d$. Пусть $A(\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, $b(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, $c(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}^d)$.*

Рассмотрим функцию Гамильтона $H(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$, *такую, что* $H(q,p)=p\cdot A(q)p+ib(q)\cdot p+c(q)$. *Пусть* $\widehat{H}_\tau(q,D)$ — *псевдоо-дифференциальный оператор с* τ*-символом* $H(q,p)$, $\tau\in[0,1]$. *Предположим, что замыкание* L_τ *оператора* $-\widehat{H}_\tau(q,D)$ *является генератором сильно непрерывной полугруппы* $(T_t^\tau)_{t\geq 0}$ *на пространстве* $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ *и существует* $0<\alpha_\tau\leq 1$, *такое, что множество* $C_c^{2,\alpha_\tau}(\mathbb{R}^d)$ *является существенной областью определения оператора* $(L_\tau,\mathrm{Dom}(L_\tau))$. *Тогда при всех* $\varphi\in C_\infty(\mathbb{R}^d)$, $q_0\in\mathbb{R}^d$, $t>0$ *справедлива лагранжева формула Фейнмана*

$$T_t^\tau\varphi(q_0)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\cdots\int\limits_{\mathbb{R}^d}\exp\left(\frac{t}{n}\sum_{j=1}^n V_\tau(q_{j-1})\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n A^{-1}(q_{j-1})b_\tau(q_{j-1})\cdot(q_j-q_{j-1})\right)\times$$
$$\times\, p_A(t/n,q_0,q_1)\cdots p_A(t/n,q_{n-1},q_n)\varphi(q_n)\,dq_1\ldots dq_n, \quad (25)$$

где $b_\tau(q)=b(q)-2(1-\tau)\operatorname{div}A(q)$, $V_\tau(q)=-c(q)-(1-\tau)\operatorname{div}b(q)+(1-\tau)^2\operatorname{tr}(\operatorname{Hess}A(q))-\frac{1}{4}A^{-1}(q)b_\tau(q)\cdot b_\tau(q)$, $a(q)=\det A(q)$, $p_A(t,q,y):=\frac{1}{\sqrt{a(q)(4\pi t)^d}}\exp\Big(-\frac{A^{-1}(q)(q-y)\cdot(q-y)}{4t}\Big)$ *и сходимость локально равномерна по* $(q_0,t)\subset\mathbb{R}^d\times[0,\infty)$.

З а м е ч а н и е 8. В предположениях предыдущей теоремы и при некоторых дополнительных условиях на рост коэффициентов A и b_τ (см. [47, th. 7.6]) полугруппа $(T_t^\tau)_{t\geq 0}$ может быть также представлена по формуле Фейнмана — Каца

$$T_t^\tau\varphi(q)=\mathbb{E}^q\left[\exp\left(-\int\limits_0^t c_\tau(X_s^\tau)\,ds\right)\varphi(X_t^\tau)\right],\quad q\in\mathbb{R}^d,\quad t\in(0,T), \quad (26)$$

где $\mathbb{E}^q$ — математическое ожидание диффузионного процесса $(X_t^\tau)_{0<t<T}$ в $\mathbb{R}^d$ (с переменным коэффициентом диффузии $\sqrt{A(\cdot)}$ и сносом $-b_\tau(\cdot)$), стартующего в точке $q\in\mathbb{R}^d$; здесь b_τ, c_τ — те же, что и в теореме 6. Таким образом, лагранжева формула Фейнмана (25) дает аппроксимации функционального интеграла в формуле (26).

4. Псевдомеры Фейнмана и интегралы Фейнмана по траекториям

Псевдомера Фейнмана на (обычно бесконечномерном) векторном пространстве или многообразии — это линейный непрерывный функционал на локально выпуклом пространстве (некоторых) функций, определенных на этом векторном пространстве или многообразии. Значение, которое данный функционал принимает на функции из своей области определения, называется интегралом Фейнмана от этой функции (по векторному пространству или многообразию) или интегралом от этой функции по псевдомере Фейнмана. Если рассматриваемое векторное пространство или многообразие, в свою очередь, состоит из функций, принимающих значения в классическом конфигурационном (или фазовом) пространстве, то соответствующий интеграл называется интегралом Фейнмана по траекториям в конфигурационном (или фазовом) пространстве. При этом, само классическое конфигурационное (или фазовое) пространство само может быть бесконечномерным (например, в квантовой теории поля). В частности, элементы этих классических пространств могут быть функциями, принимающими значения в некотором векторном пространстве или многообразии.

Существует несколько различных подходов к определению псевдомер Фейнмана. Например, с помощью предела интегралов по пространствам, изоморфным декартовым степеням классического конфигурационного или фазового пространства (Фейнман [33,34], 1948, 1951 гг.); с помощью аналитического продолжения гауссовской меры (Гельфанд — Яглом [37] — для интегралов по траекториям в конфигурационном пространстве, 1956 г.; аналогичный результат для интегралов по траекториям в фазовом пространстве был получен в 1990 г. в [63]), с помощью преобразования Фурье (Сесиль де Витт-Моретт [28], 1974 г.); с помощью равенства Парсеваля (Маслов — Чеботарев [51] и Альбеверио — Хег-Крон [3] — для интегралов по траекториям в конфигурационном пространстве, 1976); в рамках White Noise Analysis (Хида — Штрайт [38] — для интегралов по траекториям в конфигурационном пространстве, 1983 г.; Бок — Гротхаус — для интегралов по траекториям в фазовом пространстве [6], 2011 г.); как центральная предельная теорема для интегралов Фейнмана по траекториям в конфигурационом пространстве (см. [73]), так и формула Камерона — Мартина, полученная в [31] (см. также [66]), могут быть использованы в качестве определений.

На концептуальном уровне наиболее удобным является определение с помощью преобразования Фурье; для непосредственных вычислений наиболее подходящее определение — это определение с помощью предела конечнократных интегралов по пространствам, изоморфным декартовым степеням конфигурационного или фазового пространства. Причем в последнем случае как интеграл Фейнмана, так и псевдомера Фейнмана называются секвенциальным интегралом и секвенциальной псевдомерой. В связи с вышесказанным, мы сначала сформулируем определения, использующие преобразование Фурье, а затем определим секвенциальные псевдомеру и интеграл Фейнмана. В обоих случаях мы сперва дадим общее определение псевдомеры (и соответствующего интеграла), а после рассмотрим некоторые конкретные случаи.

Начнем с определения преобразования Фурье. Для произвольного локально выпуклого пространства X символ X^* обозначает векторное пространстве всел непрерывных линейных функционалов на X. Пусть E — вещественное векторное пространство, и для всех $x \in E$ и любого линейного функционала g на E пусть $\varphi_g(x) = e^{ig(x)}$. Пусть F_E — это локально выпуклое пространство некоторых комплекснозначных функций на E. Элементы множества F_E^* называются F_E^*−распределениями на E, или просто распределениями на E (если мы не указываем точно пространство F_E^*). Пусть также G — векторное пространство некоторых линейных функционалов на E, разделяющих E, и для всех $g \in G$ пусть $\varphi_g \in F_E$. Тогда G-преобразование Фурье элемента $\eta \in F_E^*$ — это функция на G, обозначаемая $\widetilde{\eta}$ или $\mathcal{F}[\eta]$ и определяемая формулой $\widetilde{\eta}(g)(\equiv \mathcal{F}[\eta](g)) = \eta(\varphi_g)$. Если множество $\{\varphi_g : g \in G\}$ тотально в F_E (т.е. линейная оболочка $\{\varphi_g : g \in G\}$ плотна в F_E), то элемент η однозначно определяется своим преобразованием Фурье.

Определение 3. Если b — квадратичный функционал на G, $a \in E$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, то α-псевдомера Фейнмана на E с корреляционным функционалом b и средним значением a — это распределение $\Phi_{b,a,\alpha}$ на E, чье преобразование Фурье задано формулой $\mathcal{F}[\Phi_{b,a,\alpha}](g) = \exp\left(\frac{\alpha b(g)}{2} + ig(a)\right)$.

Если $\alpha = -1$ и $b(g) \geq 0$ при всех $g \in G$, то α-псевдомера Фейнмана является гауссовской G-цилиндрической мерой на E (которая, однако, может не быть σ-аддитивной). Если $\alpha = i$, то мы получаем «настоящую» псевдомеру Фейнмана; именно i-псевдомера Фейнмана обычно используется для представления решений как эволюционных уравнений шредингеровского типа, так эволюционных уравнений с псевдодифференциальными операторами в правой части.

Далее мы будем рассматривать только i-псевдомеры Фейнмана и будем называть их просто псевдомерами Фейнмана. Предположим также, что $a = 0$.

Определение 4. [Гамильтонова псевдомера Фейнмана] Пусть $E = Q \times P$, где Q и P — локально выпуклые пространства, $Q = P^*$, $P = Q^*$ (как векторные пространства); пространство $G = P \times Q$ отождествлено с пространством линейных функционалов на E (для любого $g = (p_g, q_g) \in G$ и $x = (q, p) \in E$, $g(x) = p_g(q) + p(q_g)$). Тогда гамильтонова, или симплектическая псевдомера Фейнмана на E — это любая псевдомера Фейнмана на E с корреляционным функционалом b, заданным формулой $b(p_g, q_g) = 2p_g(q_g)$.

Пусть существует линейное инъективное отображение $B : G \to E$, такое, что $b(g, g) = g(B(g))$ для всех $g \in G$ (B называется корреляционным оператором псевдомеры Фейнмана). Пусть $D(B^{-1})$ — область определения B^{-1}. Функция $D(B^{-1}) \ni x \mapsto e^{\frac{\alpha^{-1}B^{-1}(x)(x)}{2}}$ называется обобщенной плотностью α-псевдомеры Фейнмана (см. [67]). Далее мы используем некоторые стандартные регуляризации бесконечномерных осциллирующих интегралов.

Пример 3. Если $E = \mathbb{R}^d = G$, то псевдомера Фейнмана Φ на E с корреляционным оператором B может быть отождествлена с комплекснозначной мерой (неограниченной вариации) на δ-кольце ограниченных борелевских подмножеств $\mathbb{R}^d$, имеющей плотность $f(x) = e^{-\frac{i}{2}(B^{-1}x,x)}$ относительно меры Лебега. В этом случае обобщенная плотность совпадает с плотностью в обычном смысле.

З а м е ч а н и е 9. Итак, гамильтонова псевдомера Фейнмана — это линейный функционал Φ на векторном пространстве функционалов, чья общая область определения есть векторное пространство функций, определенных на отрезке $[0, t]$, $t > 0$, и принимающих значения в фазовом пространстве $\mathbf{E} = \mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ классической гамильтоновой системы. Значение $\Phi(F)$, которое псевдомера Φ принимает на функционале F, называется гамильтоновым интегралом Фейнмана (или интегралом Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве) от F и часто обозначается как

$$\Phi(F) = \int F(q(\cdot), p(\cdot))\, e^{i\int\limits_0^t p(\tau)q'(\tau)d\tau} \prod_{\tau=0}^{t} dq(\tau)dp(\tau) \quad \text{или} \quad \int G(q(\cdot), p(\cdot))\, \Phi(dq, dp).$$

При некоторых дополнительных предположениях (см. [63]) функция

$$(t,x) \mapsto \int e^{-i\int\limits_0^t H(q(\tau)+x,p(\tau))d\tau} f_0(q(t)+x) e^{i\int\limits_0^t p(\tau)q'(\tau)d\tau} \prod_{\tau=0}^{t} dq(\tau)dp(\tau)$$

является решением уравнения Шредингера $i\dfrac{\partial f}{\partial t} = \widehat{H}f$, где $\widehat{H}$ — псевдо-дифференциальный оператор с символом H.

Определение 5 (Секвенциальная псевдомера Фейнмана)**.** Пусть $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$‘— возрастающая последовательность конечномерных подпространств $D(B^{-1})$. Тогда значение секвенциальной α-псевдомеры Фейнмана $\Phi_{B,\alpha}^{\{E_n\}}$, ассоциированной с последовательностью $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, на функции $f : E \to \mathbb{C}$ (это значение называется секвенциальным интегралом Фейнмана от функции f) определено по формуле

$$\Phi_{B,\alpha}^{\{E_n\}}(f) = \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_{E_n} e^{\frac{\alpha^{-1}B^{-1}(x)(x)}{2}} dx \right)^{-1} \int\limits_{E_n} f(q,p) e^{\frac{\alpha^{-1}B^{-1}(x)(x)}{2}} dx,$$

где интегрирование производится по мере Лебега на E_n, если предел в правой части формулы существует. При этом интегралы понимаются в некотором регуляризованном смысле, например,

$$\int\limits_{E_n} G(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{E_n} G(x)\,e^{-\varepsilon|x|^2} dx.$$

Таким образом, тот факт, что функция принадлежит области определения $\Phi^{\{E_n\}}$, зависит только лишь от сужений этой функции на E_n.

Следующее определение является частным случаем предыдущего, однако, полезно сформулировать его независимо.

Определение 6 (Секвенциальная гамильтонова псевдомера Фейнмана)**.** Пусть $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность конечномерных векторных подпространств $E(= Q \times P)$ таких, что при всех $n \in \mathbb{N}$, $E_n = Q_n \times P_n$, где Q_n и P_n — векторные подпространства Q и P соответственно. Тогда значение секвенциальной гамильтоновой псевдомеры Фейнмана $\Phi^{\{E_n\}}$, ассоциированной с последовательностью $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, на функции $f : E \to \mathbb{C}$ (это значение называется секвенциальным гамильтоновым интегралом Фейнмана от функции f) определяется по формуле

$$\Phi^{\{E_n\}}(f) = \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_{E_n} e^{i\langle p,q\rangle} dqdp \right)^{-1} \int\limits_{E_n} f(q,p)\, e^{i\langle p,q\rangle} dqdp,$$

где $\langle p,q\rangle = p(q)$, интегрирование производится по произвольной мере Лебега на E_n, если предел в правой части формулы существует.

И снова тот факт, что функция принадлежит области определения $\Phi^{\{E_n\}}$, зависит только лишь от сужений этой функции на E_n. Если постранство E — это пространство функций вещественной переменной, то соответствующие интегралы Фейнмана называются интегралами Фейнмана по траекториям.

5. Гамильтоновы интегралы Фейнмана для эволюционных полугрупп

В последующем мы будем использовать следующую реализацию гамильтоновой псевдомеры Фейнмана (ср. [65, 19]). Для любого $t > 0$ пусть $PC([0,t],\mathbb{R}^d)$ — векторное пространство всех функций на $[0,t]$, принимающих значения в $\mathbb{R}^d$, чьи обобщенные производные являются мерами с конечными носителями. Пусть $PC^l([0,t],\mathbb{R}^d)$ — пространство всех непрерывных слева функций из $PC([0,t],\mathbb{R}^d)$, а $PC^r([0,t],\mathbb{R}^d)$ — пространство всех непрерывных справа функций из $PC([0,t],\mathbb{R}^d)$. Для каждого $x \in \mathbb{R}^d$ пусть $Q_t^x = \{f \in PC^r([0,t],\mathbb{R}^d) : f(0) = x\}$, $P_t = PC^l([0,t],\mathbb{R}^d)$ и $E_t^x = Q_t^x \times P_t$. Пространства Q_t^x и P_t приведены в двойственность формой: $\langle q(\cdot), p(\cdot)\rangle \mapsto \int\limits_0^t p(s)q'(s)\,ds$, где $q'(s)\,ds$ обозначает меру, являющуюся обобщенной производной функции $q(\cdot)$. Мы будем рассматривать элементы пространства E_t^x как функции, принимающие значения в $\mathbf{E} = \mathbf{Q} \times \mathbf{P} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Пусть $t_0 = 0$ и для любых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \le n$, $t_k = \dfrac{k}{n}t$. Пусть $L_n \subset PC^l([0,t],\mathbb{R}^d)$ — пространство функций, сужение которых на каждый интервал $\left(\dfrac{k-1}{n}t,\ \dfrac{k}{n}t\right]$ является постоянной функцией, и, соответственно, $R_n \subset PC^r([0,t],\mathbb{R}^d)$ — пространство постоянных на каждом интервале $\left[\dfrac{k-1}{n}t,\ \dfrac{k}{n}t\right)$ функций. $Q_n = R_n \cap Q_t^x$, $P_n = L_n \cap \{f : f(0) = \lim\limits_{0<t\to 0} f(t)\}$. Пусть J_n — отображение пространства $E_n = Q_n \times P_n$ в $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^n$, определенное следующим образом: $J(q,p) = \left(q\left(\dfrac{t}{n}\right), p\left(\dfrac{t}{n}\right), q\left(\dfrac{2t}{n}\right), p\left(\dfrac{2t}{n}\right), \ldots, q\left(\dfrac{nt}{n}\right), p\left(\dfrac{nt}{n}\right)\right) \equiv \left(q_1,\, p_1,\, \ldots,\, q_n,\, p_n\right)$. Отображение J_n является взаимно однозначным соответствием между E_n и $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^n$. В рассмотренном случае определение 6 записывается следующим образом.

Определение 7. Гамильтонов интеграл Фейнмана

$$\Phi_x^1(F) \equiv \int\limits_{E_t^x} F(q,p)\,\Phi_x^1(dq,dp) \equiv \int\limits_{E_t^x} F(q(\cdot),p(\cdot))\, e^{i\int\limits_0^t p(\tau)q'(\tau)\,d\tau} \prod_{\tau=0}^{t} dq(\tau)dp(\tau)$$

от функции $F : Q_t^x \times P_t \to \mathbb{R}$ определяется как предел

$$\Phi_x^1(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{mn}} \int\limits_{(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)^n} F(J_n^{-1}(q_1,p_1,\ldots\ldots,q_n,p_n))\, e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} p_k\cdot(q_k-q_{k-1})} dq_1dp_1\ldots\ldots dq_ndp_n,$$

где $q_0 = x$.

З а м е ч а н и е 10. Для псевдомеры Φ_x^1 можно определить обобщенную плотность

$$\int\limits_{E_t^x} G(q(\tau),p(\tau))\Phi_x^1(dqdp) = \lim_{n\to\infty} C_n \int\limits_{Q_n\times P_n} G(q(\tau),p(\tau))\, e^{i\int\limits_0^t p(\tau)q'(\tau)\,d\tau} \nu_n(dq)\, nu_n(dp),$$

где

$$(C_n)^{-1} = \int\limits_{Q_n\times P_n} e^{i\int\limits_0^t p(\tau)q'(\tau)\,d\tau} \nu_n(dq)\nu_n(dp)$$

и интегрирование производится по мере Лебега ν_n.

З а м е ч а н и е 11. Описанная конструкция (точнее ее небольшие модификации) использовалась в [65] и в [55] для представления решений некоторых уравнений шредингеровского типа с помощью гамильтоновых интегралов Фейнмана; то же было сделано в [19] для уравнения теплопроводности. Причем все доказательства опирались на теорему Чернова.

По определению 7 гамильтонова формула Фейнмана (18) для феллеровской полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ может быть интерпретирована как гамильтонов интеграл Фейнмана по псевдомере Φ^1_x. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 9 (Гамильтонов интеграл Фейнмана для феллеровских полугрупп). *Пусть функция $H:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ измерима, локально ограничена по совокупности переменных (q,p) и при каждом фиксированном $q\in\mathbb{R}^d$ функция $H(q,\cdot)$ удовлетворяет формуле Леви — Хинчина* (9)*. Пусть также выполнены условия а), б), в) и* (17)*. Предположим, что функция $H(q,p)$ такова, что $-\widehat{H}_1(\cdot,D)$ замыкаем, замыкание порождает сильно непрерывную полугруппу $(T_t)_{t\geq 0}$ на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ и множество $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ служит существенной областью определения генератора. Тогда полугруппа $(T_t)_{t\geq 0}$ может быть представлена как гамильтонов интеграл Фейнмана по псевдомере Φ^1_x:*

$$T_t\varphi(x)=\int\limits_{E_t^x} e^{-\int\limits_0^t H(q(s),p(s))ds}\varphi(q(t))\,\Phi^1_x(dqdp). \tag{27}$$

Аналогично гамильтонова формула Фейнмана (23) может быть интерпретирована как гамильтонов интеграл Фейнмана по псевдомере Φ^1_x.

Следствие 2 (Гамильтонов интеграл фейнмана для τ-квантования квадратичной функции). Пусть $A(q)$ — положительно определенная симметричная матрица, $b(q)\in\mathbb{R}^d$, $c(q)\geq 0$ при всех $q\in\mathbb{R}^d$. Пусть $A(\cdot)\in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, $b(\cdot)\in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, $c(\cdot)\in C_b(\mathbb{R}^d)$. Рассмотрим функцию Гамильтона $H(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$, $H(q,p)=p\cdot A(q)p+ib(q)\cdot p+c(q)$. Пусть $\widehat{H}_\tau(\cdot,D)$ — псевдо-дифференциальный оператор с τ-символом $H(q,p)$, $\tau\in[0,1]$. Предположим, что $-\widehat{H}_\tau(\cdot,D)$ порождает сильно непрерывную полугруппу $(T_t^\tau)_{t\geq 0}$ на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ и множество $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ служит существенной областью определения генератора. Тогда полугруппа $(T_t^\tau)_{t\geq 0}$ может быть представлена с помощью гамильтонова интеграла Фейнмана по псевдомере Φ^1_x:

$$\begin{aligned}T_t^\tau\varphi(x)&=\int\limits_{E_t^x}\exp\left(-\int\limits_0^t H^\tau(q(s),p(s))ds\right)\varphi(q(t))\,\Phi^1_x(dqdp)=\\
&=\int\limits_{E_t^x}\exp\left(-\int\limits_0^t p(s)\cdot A(q(s))\,p(s)\,ds\right)\exp\left(-i\int\limits_0^t\big[b(q(s))-2(1-\tau)\,\mathrm{div}\,A(q(s))\cdot p(s)\big]\,ds\right)\times\\
&\times\exp\left(-\int\limits_0^t\big[c(q(s))+(1-\tau)\,\mathrm{div}\,b(q(s))-(1-\tau)^2\,\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}\,A(q(s)))\big]\,ds\right)\varphi(q(t))\Phi^1_x(dqdp).\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 12. (i) Отметим, что полученные интегралы Фейнмана различны при различных τ и, значит, процедура квантования различима на языке интегралов Фейнмана.

(ii) Из результатов предыдущих теоремы и следствия вытекает следующее: для некоторого класса функций доказано существование гамильтоновых интегралов Фейнмана от них по псевдомере Φ_x^1; показано совпадение таких интегралов Фейнмана с действием некоторых сильно непрерывных полугрупп на пространстве $C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Кроме того, в случае феллеровских полугрупп гамильтоновы интегралы Фейнмана по псевдомере Φ_x^1 совпадают с функциональными интегралами по вероятностным мерам, порожденным соответствующими феллеровскими процессами $(X_t)_{t\geq 0}$. Таким образом, получена формула, преобразующая интегралы по псевдомере Фейнмана Φ_x^1 в интегралы по счетно-аддитивным мерам (аналог формулы замены переменных):

$$\int\limits_{E_t^x} \exp\left(-\int\limits_0^t H(q(s),p(s))\,ds\right)\varphi(q(t))\,\Phi_x^1(dqdp) = \mathbb{E}^x\big[\varphi(X_t)\big] \equiv T_t\varphi(x).$$

Пример 4. Отметим, что с учетом теоремы 5.1 из [18] о формулах Фейнмана для аддитивных возмущений полугрупп гамильтонова формула Фейнмана (18) (а, значит, и гамильтонов интеграл Фейнмана (27)) справедлива для полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$, порожденной 1-квантованием функции Гамильтона $H(q,p) = \sqrt{p^2+m^2} - m + V(q)$, соответствующей классической релятивистской частице без спина в потенциальном поле $V:\mathbb{R}^d \to [0,\infty)$, $V\in C(\mathbb{R}^d)$. Таким образом, для этой полугруппы $(T_t)_{t\geq 0}$ справедливы представления

$$T_t\varphi(x) = \lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-dn}\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{2n}} \exp\left(i\sum_{k=1}^n p_k\cdot(q_{k-1}-q_k)\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{p_k^2+m^2} - m + V(q_{k-1})\right)\varphi(q_n)\,dq_1dp_1\cdots dq_ndp_n =$$
$$= \int\limits_{E_t^x = Q_t^x\times P_t} \exp\left(-\int\limits_0^t (\sqrt{p(s)^2+m^2} - m + V(q(s)))\,ds\right)\varphi(q(t))\,\Phi_x^1(dqdp) =$$
$$= \mathbb{E}^x\left[\exp\left(-\int\limits_0^t V(X_s)\,ds\right)\varphi(X_t)\right],$$

где $(X_t)_{t\geq 0}$ — процесс Леви с 1-символом $H(p) = \sqrt{p^2+m^2} - m$. Последнее равенство следует из результатов Ичинозе — Тамуры [41].

Заключение

В настоящей работе рассмотрены представления решений эволюционных уравнений (или, что то же самое, представления эволюционных полугрупп) в виде пределов кратных интегралов при возрастании кратности к бесконечности. Такие представления называются формулами Фейнмана. Рассмотрены формулы Фейнмана для полугрупп, порожденных некоторыми псевдо-дифференциальными операторами (в частности, для феллеровских полугрупп и полугрупп, порожденных различными типами квантования квадратичной функции Гамильтона). Введена некоторая конструкция интеграла Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве и показано, что рассмотренные формулы Фейнмана совпадают с подобными интегралами. Тем самым, показана связь между интегралами по псевдомере Фейнмана на траекториях в фазовом пространстве и интегралами по вероятностным мерам, соответствующим феллеровским случайным процессам. Таким образом, результаты работы, с одной стороны, направлены на развитие строгого математического аппарата интегралов Фейнмана; с другой стороны, позволяют аппроксимировать переходные вероятности случайных процессов, доставляя, тем самым, средство компьютерного моделирования стохастической динамики.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-4255.2012.1 и гранта РФФИ 10-01-00724-а.

Список литературы

1. Albeverio S., Guatteri G., Mazzucchi S. Phase space Feynman path integrals // J. Math. Phys. 2002. V. 43, No 6. P. 2847–2857.
2. Albeverio S., Høegh-Krohn R., Mazzucchi S. Mathematical theory of Feynman path integrals: an introduction / Lect. Not. Math., V. 523. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 2008.
3. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Mathematical theory of Feynman path integrals / Lect. Not. Math, V. 523. Berlin: Springer, 1976.
4. Березин Ф.А. Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве // Успехи физ. наук. 1980. Т. 132, № 3. Р. 497–548.
5. Berg C., Forst G. Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups / Ergeb. Math. Grenzgeb. V.87. Berlin: Springer, 1975.
6. Bock W., Grothaus M. A white noise approach to phase space Feynman path integrals // Theory of Probability and Mathematical Statistics in honor of Anatolij Skorokhod, Volodymyr Korolyuk and Igor Kovalenko, (2011), 27 p (в печати).
7. Böttcher B., Schilling R.L. Approximation of Feller processes by Markov chains with Lévy increments // Stochastics and Dynamics. 2009. V. 9. P. 71–80.
8. Böttcher B., Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Feynman formulae and path integrals for some evolutionary semigroups related to τ-quantization // Rus. J. Math. Phys. 2011. V. 18, No 4. P. 387–399.
9. Бутко Я.А. Формулы Фейнмана и функциональные интегралы для диффузии со сносом в области многообразия // Мат. Заметки. 2008. Т. 83, № 3. С. 333–349.

10. Butko Ya.A. Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold // J. Math. Sci. 2008. V. 151, No 1. P. 2629–2638.

11. Бутко Я.А. Формула Фейнмана — Каца — Ито для бесконечномерного уравнения Шредингера со скалярным и векторным потенциалами // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 1. С. 75–87.

12. Бутко Я.А. Функциональные интегралы для уравнения Шредингера в компактном римановом многообразии // Мат. Заметки. 2006. Т. 79, № 2. С. 194–200.

13. Бутко Я.А. Формула Фейнмана для полугрупп с мультипликативно возмущенными генераторами // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2011. 77-30569/239563.

14. Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman formulae for second order parabolic equations in bounded and unbounded domains // Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top. 2010. V. 13, No 3. P. 377–392.

15. Бутко Я.А., Гротхаус М., Смолянов О.Г. Формула Фейнмана для параболического уравнения второго порядка в области // Докл. РАН. 2008. Т. 421, № 6. С. 727–732.

16. Бутко Я.А., Дурягин А.В. Формулы Фейнмана для семейства параболических уравнений, соответствующих тау-квантованию квадратичной функции Гамильтона // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2011. 77-30569/251251.

17. Бутко Я.А., Морозов А.В. Представление решения задачи Коши — Неймана для параболического уравнения на полупрямой с помощью лагранжевой формулы Фейнмана // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2011. 77-30569/246219.

18. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations // Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top. 2012 (в печати).

19. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman — Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass // Int. J. Theor. Phys. 2011. V. 50. P. 2009–2018.

20. Бутко Я.А., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана в стохастической и квантовой динамике // Современные проблемы математики и механики. 2011. Т. VI, № 1. С. 61–75.

21. Бутко Я.А., Смолянов О.Г., Шиллинг Р.Л. Формулы Фейнмана для феллеровских полугрупп // Докл. РАН. 2010. Т. 434, № 1. С. 7–11.

22. Carmona R., Masters W.Ch., Simon B. Relativistic Schroedinger Operators: Asymptotic Behavior of the Eigenfunctions // J. Func. Anal. 1990. V. 91. P. 117–142.

23. Cartier P. De Witt-Morette C. Functional integration: action and symmetries. Cambridge Uni. Press, 2006.

24. Chernoff P. Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators // Mem. Am. Math. Soc. 1974. V. 140.

25. Courrège Ph. Sur la forme intégro-différentielle des opérateurs de C_K^∞ dans C satisfaisant au principe du maximum // Séminaire de Théorie du Potentiel. 1965/66. V. 2, 38 p.

26. Daubechies I., Klauder J.R. Quantum-mechanical path integrals with Wiener measure for all polynomial Hamiltonians. II // J. Math. Phys. 1985. V. 26, No 9. P. 2239–2256.

27. De Witt-Morette C., Maheshwari A., Nelson B. Path integration in non-relativistic quantum mechanics // Phys. Rep. 1979. V. 50, No 5. P. 255–372.

28. De Witt-Morette C. Feynman path integrals // Commun. Math. Phys. 1974. V. 37. P. 63–81.

29. Dorroh J.R. Contraction semi-groups in a function space // Pacific J.Math. 1966. V. 19, No 1. P. 35–38.

30. Дурягин А.В. Формулы Фейнмана для параболического уравнения второго порядка и их применение / Квалификационная работа бакалавра. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010 г. 49 с.

31. Elworthy D., Truman A. Feynman maps, Cameron-Martin formulae and anharmonic oscillators // Ann. Inst. HenriPoincaré, Physique théorique. 1984. V. 41, No 2. P. 115–142.

32. Ethier S.E., Kurtz T.G. Markov Processes: Characterization and Convergence / Ser. Probab. Math. Stat. New York: Wiley, 1986.

33. Feynman R.P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. P. 367–387.

34. Feynman R.P. An Operator Calculus Having Applications in Quantum Electrodynamics // Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 108–128.

35. Gadella M., Smolyanov O.G. Feynman Formulas for Particles with Position-Dependent Mass // Dokl. Math. 2007. V. 77, No 1. P. 120–123.

36. Garrod C. Hamiltonian path integral methods // Rev. Mod. Phys. 1966. V. 38, No 3. P. 483–494.

37. Гельфанд И.М., Яглом А.М. Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике // Успехи математических наук. 1956. Т. 11, № 1. Р. 77–114.

38. Hida T., Streit L. Generalized Brownian functionals and the Feynman integral // Stochastic Processes and Their Appl. 1983. V. 16. P. 55–69.

39. Hiroshima F., Ichinose T., Lőrinczi J. Path integral representation for Schrödinger operators with Bernstein functions of the Laplacian // arXiv:0906.0103v4.

40. Hwang I.L. The L_2-boundness of pseudodifferential operators // Trans. A.M.S. 1987. V. 302, No 1. P. 55–76.

41. Ichinose T., Tamura H. Imaginary-time integral for a relativistic spinless particle in an electromagnetic field // Commun. Math. Phys. 1986. V. 105. P. 239–257.

42. Ichinose W. The phase space Feynman path integral with gauge invariance and its convergence // Rev. Math. Phys. 2000. V. 12. P. 1451–1463.

43. Jacob N. Characteristic functions and symbols in the theory of Feller processes // Potential Anal. 1998. V. 8. P. 61–68.

44. Jacob N. Pseudo-differential operators and Markov processes. V. 1-3. Imperial College Press, 2001.

45. Jacob N., Potrykus A. Roth's Method Applied to Some Pseudo-Differential Operators with Bounded Symbols. A Case Study // Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo. 2005. Ser. II, No 76. P. 45–57.

46. Jacob N., Schilling R.L. Lévy-type processes and pseudo differential operators / O. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. Resnick (eds.): Lévy processes: theory and applications. Boston: Birkhäuser, 2001. P. 139–167.

47. Karatzas I., Shreve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer. 1991.

48. Kitada H., Kumano-go H. A family of Fourier integral operators and the fundamental solution for a Schrцdinger equation // Osaka J. Math. 1981. V. 18. P. 291–360.

49. Kumano-go N. A Hamiltonian path integral for a degenerate parabolic pseudo-differential operators // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1996. V. 3. P. 57–72.

50. Kumano-go N., Fujiwara D. Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations // Bull. Sci. math. 2008. V. 132. P. 313–357.

51. Маслов В.П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. Москва: Наука, 1976.

52. Морозов А.В. Лагранжевы формулы Фейнмана для задач Коши — Дирихле и Коши — Неймана для параболического уравнения на полупрямой / Квалификационная работа бакалавра. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. 42 с.

53. Nelson E. Feynman integrals and the Schrödinger equation // J. Math. Phys. 1964. V. 3. P. 332–343.

54. Obrezkov O.O. The Proof of the Feynman-Kac Formula for Heat Equation on a Compact Riemannian Manifold // IDAQP. 2003. V. 6, No 2. P. 311–320.

55. Obrezkov O.O., Smolyanov O.G., Truman A. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula // Dokl. Math. 2005. V. 71, No 1. P. 105–110.

56. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. V. I. Academic Press, 1980.

57. Sakbaev V.G., Smolyanov O.G. Dynamics of a Quantum Particle with Discontinuous Position-Dependent Mass // Dokl. Math. 2010. V. 82, No 1. P. 630–634.

58. Sato K. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions // Cambridge Univ. Press, 1999.

59. Schilling R.L. Conservativeness of semigroups generated by pseudo differential operators // Potential Anal. 1998. V. 9. P. 91–104.

60. Schilling R.L., Schnurr A. The symbol associated with the solution of a stochastic differential equation // El. J. Probab. 2010. V. 15. P. 1369–1393.

61. Smolyanov O.G. Feynman type formulae for quantum evolution and diffusion on manifolds and graphs // Quant. Bio-Informatics, World Sc. 2010. V. 3. P. 337–347.

62. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Hamiltonian Feynman Integrals for Equations with the Vladimirov Operator // Dokl. Math. 2010. V. 81, No 2. P. 209–214.

63. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.

64. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Носитель симплектической меры Фейнмана и принцип неопределенности // ДАН. 1992. Т. 323, № 6. Р. 1038–1042.

65. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys. 2002. V. 43, No 10. P. 5161–5171.

66. Smolyanov O.G., Truman A. Change of variable formulas for Feynman pseudomeasures // Theor. Math. Phys. 1999. V. 119, No 3. P. 677–686.

67. Smolyanov O.G., von Weizsaecker H., Wittich O. Smooth probability measures and associated differential operators // Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. 1999. V. 2, No 1. P. 51–78.

68. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.V., Wittich O. Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures // Dokl. Math. 2000. V. 61. P. 230–234.

69. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.V., Wittich O. Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions // Stochastic Proceses, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honor of Sergio Albeverio. Ser. Conference Proceedings. Canadian Math. Society. Providence: AMS. 2000. V. 29. P. 589–602.

70. Smolyanov O.G., von Weizsäcker H., Wittich O. Chernoff's theorem and the construction of semigroups // Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics. Proc. 7th Intnl. Conf. Evolution Eqs and Appl., Levico Terme, Italy, Oct./Nov. 2000. Birkhäuser, Prog. Nonlinear Differ. Eq. Appl. 2003. V. 55. P. 349–358.

71. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.V., Wittich H.V. Surface Measures and Initial Boundary Value Problems Generated by Diffusions with Drift // Dokl. Math. 2007. V. 76, No 1. P. 606–610.

72. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.V., Wittich O. Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds // Potent. Anal. 2007. V. 26, No 1. P. 1–29.

73. Smolyanov O.G., Khrennikov A.Yu. Central limit theorem for generalized measures on rigged Hilbert spaces // Soviet Math. Dokl. 1985. V. 31. P. 301–304.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
El № FS77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Representations of evolution semigroups by Feynman formulae and phase space Feynman path integrals

77-30569/315838

02, February 2012

Ya.A. Butko

Bauman Moscow State Technical University
yanabutko@yandex.ru

In the present paper a new method to investigate and to describe linear dynamics is considered. This method is based on representations of corresponding evolution semigroups (or, what is the same, representations of solutions of the corresponding equations) by Feynman formulae, i.e. by limits if iterated n-fold integrals when n tends to infinity. Sometimes one succeeds to get Feynman formulae containing only integrals of elementary functions. Such Feynman formulae allow to calculate solutions of evolution equations directly, to approximate transition probabilities of stochastic processes, to model stochastic and quantum dynamics numerically. The limits in Feynman formulae coincide with some functional integrals with respect to probability measures or Feynman type pseudomeasures. Nowadays, functional integrals (or path integrals) play one of central roles in mathematical apparatus of theoretical physics; they are important objects of quantum field theory, especially in the theory of gauge fields. To solve a variety of problems it is worth to apply Hamiltonian formalism of quantum mechanics and to deal with (Hamiltonian) phase space Feynman path integrals. There are many different approaches to define such integrals mathematically rigorously. And different classes of integrable functions arise in the frame of each approach. In the present paper the approach of Smolyanov and his coauthors is used. This approach allows to connect phase space Feynman path integrals with Hamiltonian Feynman formulae for evolution semigroups. This method have been actively used last decade to describe different types of dynamics in domains of Euclidean spaces and Riemannian manifolds, in infinite dimensional linear and non-linear spaces, to investigate p-adic analogues of equations of mathematical physics. The present work is expository, it brings together some of the results of recent articles of the author (joint with Boettcher, Grothaus, Schilling, Smolyanov), in which the method of Feynman formulae has been subsequently developed to investigate Feller semigroups and the connection of such formulae with phase space Feynman path integrals has been studied. In this paper Feynman formulae for Feller semigroups and semigroups generated by different quantizations of a quadratic Hamilton function are obtained; a construction of phase space Feynman path integral is introduced;

phase space Feynman path integrals for Feller semigroups and semigroups generated by different quantizations of a quadratic Hamilton function are presented.

References

1. Albeverio S., Guatteri G., Mazzucchi S. Phase space Feynman path integrals // J. Math. Phys. 2002. V. 43, No 6. P. 2847–2857.

2. Albeverio S., Høegh-Krohn R., Mazzucchi S. Mathematical theory of Feynman path integrals: an introduction / Lect. Not. Math., V. 523. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 2008.

3. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Mathematical theory of Feynman path integrals / Lect. Not. Math, V. 523. Berlin: Springer, 1976.

4. Berezin F.A. Kontinual'nyy integral po traektoriyam v fazovom prostranstve // Uspekhi fiz. nauk. 1980. T. 132, № 3. P. 497–548.

5. Berg C., Forst G. Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups / Ergeb. Math. Grenzgeb. V.87. Berlin: Springer, 1975.

6. Bock W., Grothaus M. A white noise approach to phase space Feynman path integrals // Theory of Probability and Mathematical Statistics in honor of Anatolij Skorokhod, Volodymyr Korolyuk and Igor Kovalenko, (2011), 27 p (v pechati).

7. Böttcher B., Schilling R.L. Approximation of Feller processes by Markov chains with Lévy increments // Stochastics and Dynamics. 2009. V. 9. P. 71–80.

8. Böttcher B., Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Feynman formulae and path integrals for some evolutionary semigroups related to τ-quantization // Rus. J. Math. Phys. 2011. V. 18, No 4. P. 387–399.

9. Butko Ya.A. Formuly Feynmana i funktsional'nye integraly dlya diffuzii so snosom v oblasti mnogoobraziya // Mat. Zametki. 2008. T. 83, № 3. S. 333–349.

10. Butko Ya.A. Function integrals corresponding to a solution of the Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation in a domain of a Riemannian manifold // J. Math. Sci. 2008. V. 151, No 1. P. 2629–2638.

11. Butko Ya.A. Formula Feynmana — Katsa — Ito dlya beskonechnomernogo uravneniya Shredingera so skalyarnym i vektornym potentsialami // Nelineynaya dinamika. 2006. T. 2, № 1. S. 75–87.

12. Butko Ya.A. Funktsional'nye integraly dlya uravneniya Shredingera v kompaktnom rimanovom mnogoobrazii // Mat. Zametki. 2006. T. 79, № 2. S. 194–200.

13. Butko Ya.A. Formula Feynmana dlya polugrupp s mul'tiplikativno vozmushchennymi generatorami // Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie. 2011. 77-30569/239563.

14. Butko Ya.A., Grothaus M., Smolyanov O.G. Lagrangian Feynman formulae for second order parabolic equations in bounded and unbounded domains // Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top. 2010. V. 13, No 3. P. 377–392.

15. Butko Ya.A., Grotkhaus M., Smolyanov O.G. Formula Feynmana dlya parabolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka v oblasti // Dokl. RAN. 2008. T. 421, № 6. S. 727–732.

16. Butko Ya.A., Duryagin A.V. Formuly Feynmana dlya semeystva parabolicheskikh uravneniy, sootvetstvuyushchikh tau-kvantovaniyu kvadratichnoy funktsii Gamil'tona // Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie. 2011. 77-30569/251251.

17. Butko Ya.A., Morozov A.V. Predstavlenie resheniya zadachi Koshi — Neymana dlya parabolicheskogo uravneniya na polupryamoy s pomoshch'yu lagranzhevoy formuly Feynmana // Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie. 2011. 77-30569/246219.

18. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Lagrangian and Hamiltonian Feynman formulae for some Feller semigroups and their perturbations // Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. Rel. Top. 2012 (v pechati).

19. Butko Ya.A., Schilling R.L., Smolyanov O.G. Hamiltonian Feynman — Kac and Feynman formulae for dynamics of particles with position-dependent mass // Int. J. Theor. Phys. 2011. V. 50. P. 2009–2018.

20. Butko Ya.A., Smolyanov O.G. Formuly Feynmana v stokhasticheskoy i kvantovoy dinamike // Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki. 2011. T. VI, № 1. S. 61–75.

21. Butko Ya.A., Smolyanov O.G., Shilling R.L. Formuly Feynmana dlya fellerovskikh polugrupp // Dokl. RAN. 2010. T. 434, № 1. S. 7–11.

22. Carmona R., Masters W.Ch., Simon B. Relativistic Schroedinger Operators: Asymptotic Behavior of the Eigenfunctions // J. Func. Anal. 1990. V. 91. P. 117–142.

23. Cartier P. De Witt-Morette C. Functional integration: action and symmetries. Cambridge Uni. Press, 2006.

24. Chernoff P. Product formulas, nonlinear semigroups and addition of unbounded operators // Mem. Am. Math. Soc. 1974. V. 140.

25. Courrège Ph. Sur la forme intégro-différentielle des opérateurs de C_K^∞ dans C satisfaisant au principe du maximum // Séminaire de Théorie du Potentiel. 1965/66. V. 2, 38 p.

26. Daubechies I., Klauder J.R. Quantum-mechanical path integrals with Wiener measure for all polynomial Hamiltonians. II // J. Math. Phys. 1985. V. 26, No 9. P. 2239–2256.

27. De Witt-Morette C., Maheshwari A., Nelson B. Path integration in non-relativistic quantum mechanics // Phys. Rep. 1979. V. 50, No 5. P. 255–372.

28. De Witt-Morette C. Feynman path integrals // Commun. Math. Phys. 1974. V. 37. P. 63–81.

29. Dorroh J.R. Contraction semi-groups in a function space // Pacific J.Math. 1966. V. 19, No 1. P. 35–38.

30. Duryagin A.V. Formuly Feynmana dlya parabolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka i ikh primenenie / Kvalifikatsionnaya rabota bakalavra. MGTU im. N.E. Baumana. 2010 g. 49 s.

31. Elworthy D., Truman A. Feynman maps, Cameron-Martin formulae and anharmonic oscillators // Ann. Inst. HenriPoincaré, Physique théorique. 1984. V. 41, No 2. P. 115–142.

32. Ethier S.E., Kurtz T.G. Markov Processes: Characterization and Convergence / Ser. Probab. Math. Stat. New York: Wiley, 1986.

33. Feynman R.P. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. P. 367–387.

34. Feynman R.P. An Operator Calculus Having Applications in Quantum Electrodynamics // Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 108–128.

35. Gadella M., Smolyanov O.G. Feynman Formulas for Particles with Position-Dependent Mass // Dokl. Math. 2007. V. 77, No 1. P. 120–123.

36. Garrod C. Hamiltonian path integral methods // Rev. Mod. Phys. 1966. V. 38, No 3. P. 483–494.

37. Gel'fand I.M., Yaglom A.M. Integrirovanie v funktsional'nykh prostranstvakh i ego primeneniya v kvantovoy fizike // Uspekhi matematicheskikh nauk. 1956. T. 11, № 1. P. 77–114.

38. Hida T., Streit L. Generalized Brownian functionals and the Feynman integral // Stochastic Processes and Their Appl. 1983. V. 16. P. 55–69.

39. Hiroshima F., Ichinose T., Lőrinczi J. Path integral representation for Schrödinger operators with Bernstein functions of the Laplacian // arXiv:0906.0103v4.

40. Hwang I.L. The L_2-boundness of pseudodifferential operators // Trans. A.M.S. 1987. V. 302, No 1. P. 55–76.

41. Ichinose T., Tamura H. Imaginary-time integral for a relativistic spinless particle in an electromagnetic field // Commun. Math. Phys. 1986. V. 105. P. 239–257.

42. Ichinose W. The phase space Feynman path integral with gauge invariance and its convergence // Rev. Math. Phys. 2000. V. 12. P. 1451–1463.

43. Jacob N. Characteristic functions and symbols in the theory of Feller processes // Potential Anal. 1998. V. 8. P. 61–68.

44. Jacob N. Pseudo-differential operators and Markov processes. V. 1-3. Imperial College Press, 2001.

45. Jacob N., Potrykus A. Roth's Method Applied to Some Pseudo-Differential Operators with Bounded Symbols. A Case Study // Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo. 2005. Ser. II, No 76. P. 45–57.

46. Jacob N., Schilling R.L. Lévy-type processes and pseudo differential operators / O. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. Resnick (eds.): Lévy processes: theory and applications. Boston: Birkhäuser, 2001. P. 139–167.

47. Karatzas I., Shreve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer. 1991.

48. Kitada H., Kumano-go H. A family of Fourier integral operators and the fundamental solution for a Schrtsdinger equation // Osaka J. Math. 1981. V. 18. P. 291–360.

49. Kumano-go N. A Hamiltonian path integral for a degenerate parabolic pseudo-differential operators // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1996. V. 3. P. 57–72.

50. Kumano-go N., Fujiwara D. Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations // Bull. Sci. math. 2008. V. 132. P. 313–357.

51. Maslov V.P. Kompleksnye markovskie tsepi i kontinual'nyy integral Feynmana. Moskva: Nauka, 1976.

52. Morozov A.V. Lagranzhevy formuly Feynmana dlya zadach Koshi — Dirikhle i Koshi — Neymana dlya parabolicheskogo uravneniya na polupryamoy / Kvalifikatsionnaya rabota bakalavra. MGTU im. N.E. Baumana. 2011. 42 s.

53. Nelson E. Feynman integrals and the Schrödinger equation // J. Math. Phys. 1964. V. 3. P. 332–343.

54. Obrezkov O.O. The Proof of the Feynman-Kac Formula for Heat Equation on a Compact Riemannian Manifold // IDAQP. 2003. V. 6, No 2. P. 311–320.

55. Obrezkov O.O., Smolyanov O.G., Truman A. The Generalized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula // Dokl. Math. 2005. V. 71, No 1. P. 105–110.

56. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. V. I. Academic Press, 1980.

57. Sakbaev V.G., Smolyanov O.G. Dynamics of a Quantum Particle with Discontinuous Position-Dependent Mass // Dokl. Math. 2010. V. 82, No 1. P. 630–634.

58. Sato K. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions // Cambridge Univ. Press, 1999.

59. Schilling R.L. Conservativeness of semigroups generated by pseudo differential operators // Potential Anal. 1998. V. 9. P. 91–104.

60. Schilling R.L., Schnurr A. The symbol associated with the solution of a stochastic differential equation // El. J. Probab. 2010. V. 15. P. 1369–1393.

61. Smolyanov O.G. Feynman type formulae for quantum evolution and diffusion on manifolds and graphs // Quant. Bio-Informatics, World Sc. 2010. V. 3. P. 337–347.

62. Smolyanov O.G., Shamarov N.N. Hamiltonian Feynman Integrals for Equations with the Vladimirov Operator // Dokl. Math. 2010. V. 81, No 2. P. 209–214.

63. Smolyanov O.G., Shavgulidze E.T. Kontinual'nye integraly. M.: Izd-vo MGU, 1990.

64. Smolyanov O.G., Shavgulidze E.T. Nositel' simplekticheskoy mery Feynmana i printsip neopredelennosti // DAN. 1992. T. 323, № 6. P. 1038–1042.

65. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys. 2002. V. 43, No 10. P. 5161–5171.

66. Smolyanov O.G., Truman A. Change of variable formulas for Feynman pseudomeasures // Theor. Math. Phys. 1999. V. 119, No 3. P. 677–686.

67. Smolyanov O.G., von Weizsaecker H., Wittich O. Smooth probability measures and associated differential operators // Inf. Dim. Anal. Quant. Probab. 1999. V. 2, No 1. P. 51–78.

68. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.V., Wittich O. Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures // Dokl. Math. 2000. V. 61. P. 230–234.

69. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.V., Wittich O. Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions // Stochastic Proceses, Physics and Geometry: New Interplays. II: A Volume in Honor of Sergio Albeverio. Ser. Conference Proceedings. Canadian Math. Society. Providence: AMS. 2000. V. 29. P. 589–602.

70. Smolyanov O.G., von Weizsäcker H., Wittich O. Chernoff's theorem and the construction of semigroups // Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics. Proc. 7th Intnl. Conf. Evolution Eqs and Appl., Levico Terme, Italy, Oct./Nov. 2000. Birkhäuser, Prog. Nonlinear Differ. Eq. Appl. 2003. V. 55. P. 349–358.

71. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.V., Wittich H.V. Surface Measures and Initial Boundary Value Problems Generated by Diffusions with Drift // Dokl. Math. 2007. V. 76, No 1. P. 606–610.

72. Smolyanov O.G., Weizsäcker H.V., Wittich O. Chernoff's Theorem and Discrete Time Approximations of Brownian Motion on Manifolds // Potent. Anal. 2007. V. 26, No 1. P. 1–29.

73. Smolyanov O.G., Khrennikov A.Yu. Central limit theorem for generalized measures on rigged Hilbert spaces // Soviet Math. Dokl. 1985. V. 31. P. 301–304.